

# Unité 1 – Les taux de variation

Notre monde est en perpétuel changement. Comprendre la nature du changement et le rythme auquel il se produit nous permet de faire des prévisions et de prendre des décisions importantes. Par exemple, les climatologues qui surveillent un ouragan mesurent la pression atmosphérique, l'humidité, la configuration des vents et les températures océaniques. Ces variables ont un effet sur la violence de la tempête. Le calcul différentiel joue un rôle important quand vient le temps de prédire l'évolution des tempêtes, puisque ces variables changent. De même, le calcul différentiel sert à analyser les variations qui se produisent dans de nombreux domaines, tels que les sciences physiques et sociales, la médecine, le commerce et l'économie.

## Problème du chapitre

Alicia aimerait devenir démographe ou climatologue. Les démographes étudient les changements dans les populations humaines en ce qui a trait aux naissances, aux décès, à la migration, au niveau de scolarité, à l'emploi et au revenu. Les climatologues étudient les effets à court et à long terme de la variation des conditions climatiques. Comment utilise-t-on les taux de variation moyen et instantané pour analyser des données, résoudre des problèmes et faire des prédictions dans ces deux professions?

## Leçon 1 – Les taux de variation et la pente d'une courbe

On exprime habituellement la vitesse d'une voiture en kilomètres à l'heure. Cette expression indique le changement de position, en kilomètres, en fonction du temps, en heures. Elle peut représenter un taux de variation moyen ou un taux de variation instantané.

### Taux de variation moyen

Le taux de déplacement pendant un intervalle de temps.

*Exemple : Si une voiture parcourt 80km en 1h, le TVM est de 80km/h.*

Cette expression ne dit rien sur le mouvement de la voiture à différents moments durant cette heure.

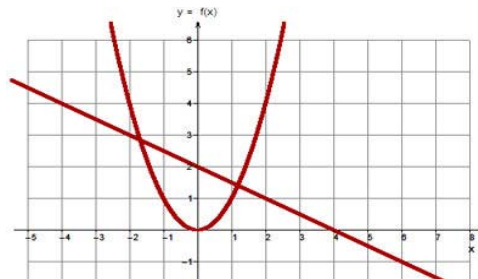
### Taux de variation instantané

Le taux de déplacement à un moment précis.

*Exemple : C'est l'information donnée par l'indicateur de vitesse de la voiture.*

### La sécante

Une droite qui relie deux points d'une même courbe.



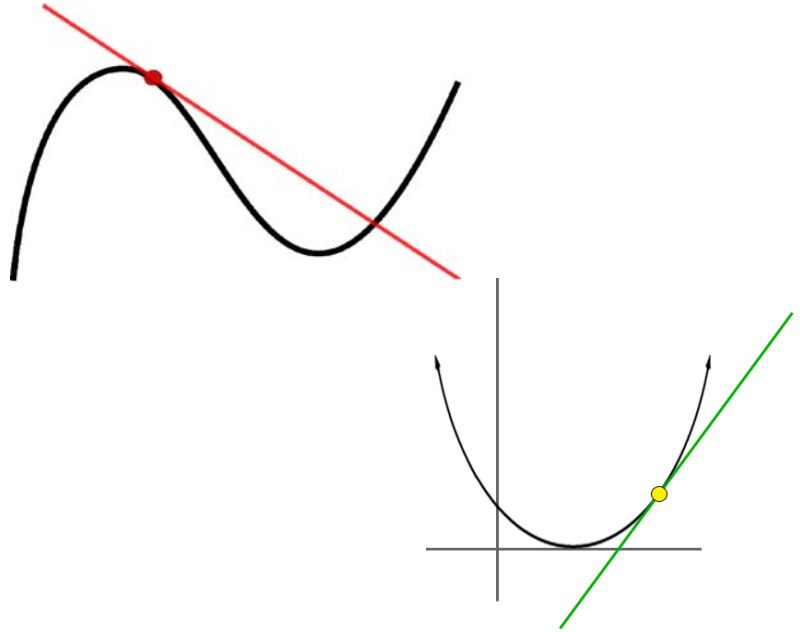
## La tangente

Une droite qui est parallèle à la courbe, ou qui a la même orientation.

Elle coupe la courbe en un seul point. Ce point se nomme point de tangence.

La droite est dite tangente à la courbe en ce point.

*Une droite tangente à la courbe en une valeur  $x$  peut être sécante à la courbe sur un intervalle de la fonction.*



## Explore

Imagine que tu souhaites acheter un véhicule. La voiture neuve qui t'intéresse se vend 22 000\$. Toutefois, comme la plupart des véhicules, cette voiture perdra de la valeur, ou se dépréciera, au fil des ans. Le tableau ci-dessous indique la valeur de la voiture sur une période de 10 ans.

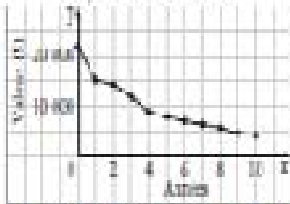
	A temps	B valeur	C
◆			
1	0	22000	
2	1	16200	
3	2	14350	
4	3	11760	
5	4	8980	
6	5	7820	
7	6	6950	
8	7	6270	
9	8	5060	
10	9	4380	
11	10	4050	

Répondez aux questions de la rubrique Exploro (pages 1 et 6)

Partie A

1. Les réponses varieront. Par exemple : La valeur de la voiture est la variable dépendante, car la valeur dépend du temps écoulé, en années, depuis l'achat de la voiture. Le temps est la variable indépendante, car on peut choisir entre 0 et 10 ans et qu'il est possible de déterminer la valeur de la voiture pour le temps choisi.

2. Dépréciation de la voiture



Les réponses varieront. Par exemple : Le taux de dépréciation de la voiture est plus grand durant la première année. Puis, le taux diminue graduellement à mesure que la voiture vieillit. Ce taux est au plus bas dix ans après l'achat.

3. a) Dépréciation de la voiture



- a) de l'an 0 à l'an 10 : pente de la sécante : -1 795
- b) de l'an 0 à l'an 1 : pente de la sécante : -3 815
- c) de l'an 1 à l'an 3 : pente de la sécante : -1 970
- d) de l'an 1 à l'an 10 : pente de la sécante : -505

b) Les réponses varieront. Par exemple : Les pentes des sécantes sont des exemples de taux de variation moyen. La pente de la sécante sur chaque intervalle représente la variation de la valeur de la voiture, en dollars, en fonction de la variation du temps, en années. Toutefois, la pente ne s'apprend rien sur la variation de la valeur de la voiture, en dollars, à différents moments de l'intervalle temps.

Temps, t (années)	Valeur, V (D)	Premières différences
0	20 000	
1	16 200	-3 800
2	14 350	-1 850
3	11 750	-2 600
4	9 000	-2 750
5	7 800	-1 200
6	6 950	-850
7	6 270	-680
8	5 650	-620
9	4 900	-750
10	4 050	-850

Les réponses varieront. Par exemple : Les premières différences sont les mêmes que le taux de variation moyen de la valeur de la voiture calculé pour chaque année de possession de la voiture.

Partie B

1. Les réponses varieront. Par exemple :

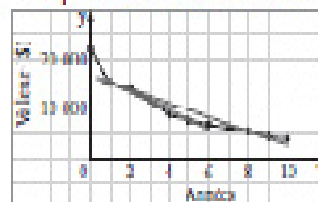
- a) La tangente représente le taux de variation instantané de la valeur de la voiture en chacun de ces points.
- b) Si les tangentes sont construites en des points arbitraires le long d'une courbe, les pentes des tangentes peuvent servir à décrire l'allure de la courbe. Si la pente de la tangente est un grand nombre négatif, la courbe diminuera rapidement. Si la pente de la tangente est un petit nombre négatif, la courbe diminuera, mais pas aussi rapidement.

2. Les réponses varieront. Par exemple :

- a) La pente de la tangente qui passe par le point correspondant à l'an 1 est  $m = -2 154,5$  (arrondi à une décimale).
- b) Le calcul de la pente de la tangente est approximatif quand on utilise une calculatrice à affichage graphique. Pour obtenir une valeur plus précise, on choisit des points très près du point correspondant à l'an 1, sur la gauche et sur la droite.

Partie C

1. a) Dépréciation de la valeur de la voiture



- a) de l'an 1 à l'an 9 : pente de la sécante : -1 477,5
- b) de l'an 1 à l'an 5 : pente de la sécante : -2 095
- c) de l'an 1 à l'an 3 : pente de la sécante : -2 120

b) Les réponses varieront. Par exemple : Les pentes des sécantes devraient de plus grands nombres négatifs et s'approchant de la valeur de la pente de la sécante de la Partie B, étape 2 a). La pente de cette sécante de l'an 1 à l'an 2 sera un plus grand nombre négatif que la pente de la sécante de l'an 1 à l'an 3, mais elle sera plus petite que la pente de la tangente à l'an 1.

c) De l'an 1 à l'an 7 : pente de la sécante : -1 350. Les réponses varieront. Par exemple : La pente de cette sécante n'est pas plus grande que la pente de la sécante de l'an 1 à l'an 3, mais elle est plus petite que la pente de la tangente à l'an 1.

2. Les réponses varieront. Par exemple : La pente de la sécante qui relie deux points d'une courbe est égale au taux de variation moyen entre deux points sur une courbe. La pente de la tangente en un point d'une courbe est égale au taux de variation instantané en un point d'une courbe.

Répondez aux questions de la rubrique Communication et compréhension (page 6)

C1 Les réponses varieront. Par exemple : Le taux de variation moyen est la pente d'une sécante qui passe par deux points sur une courbe. Le taux de variation instantané est la pente d'une tangente à une courbe en un point.

C2 Les réponses varieront. Par exemple : Pour qu'une sécante donne une meilleure estimation du taux de variation instantané en un point de l'intervalle, il faut choisir des points de la sécante près du point, à gauche et à droite.

C3 Les réponses varieront. Par exemple : Je suis en désaccord avec cet énoncé. On peut déterminer le taux de variation instantané en un point avec plus de précision en traçant la tangente à la courbe ou en utilisant les données d'une table de valeurs. Pour déterminer le taux de variation instantané avec précision à l'aide d'une table de valeurs sur une calculatrice à affichage graphique, on réduit la distance entre les valeurs consécutives de  $x$ ,  $\Delta x$ .

### Exemple 1

On remplit un ballon d'anniversaire d'hélium. Le tableau ci-contre indique le volume d'hélium contenu dans le ballon à des intervalles de 3s pendant 30s.

- a) Nomme la variable dépendante et la variable indépendante.
- b) À l'aide de la table de valeurs, calcule la pente de la sécante pour chacun des intervalles ci-dessous. Que représente la pente de la sécante?
- i) 21 s à 30 s   ii) 21 s à 27 s   iii) 21 s à 24 s
- c) Le volume d'hélium dans le ballon est représenté par un taux de variation positif. Explique ce que cela veut dire.
- d) Représente graphiquement les données du tableau. Trace une tangente approximative au point correspondant à 21 s dans le graphique, puis calcule sa pente. Qu'est-ce que ce graphique montre? Que représente la pente de la tangente?

	A <sub>t</sub>	B <sub>v</sub>	C
◆			
1	0	0	
2	3	4.2	
3	6	33.5	
4	9	113.	
5	12	267.9	
6	15	523.3	
7	18	904.3	
8	21	1436.	
9	24	2143.6	
10	27	3052.1	
11	30	4186.7	

E10

a) Puisque le volume dépend du temps, la variable dépendante est le volume,  $V$ , et la variable indépendante est le temps,  $t$ .

$$TVM = \frac{v(30) - v(21)}{30 - 21}$$

$$tvm = \frac{4186.7 - 1436}{30 - 21}$$

►  $tvm = 305.633$

$$TVM = \frac{v(27) - v(21)}{27 - 21}$$

$$tvm = \frac{3052.1 - 1436}{27 - 21}$$

►  $tvm = 269.35$

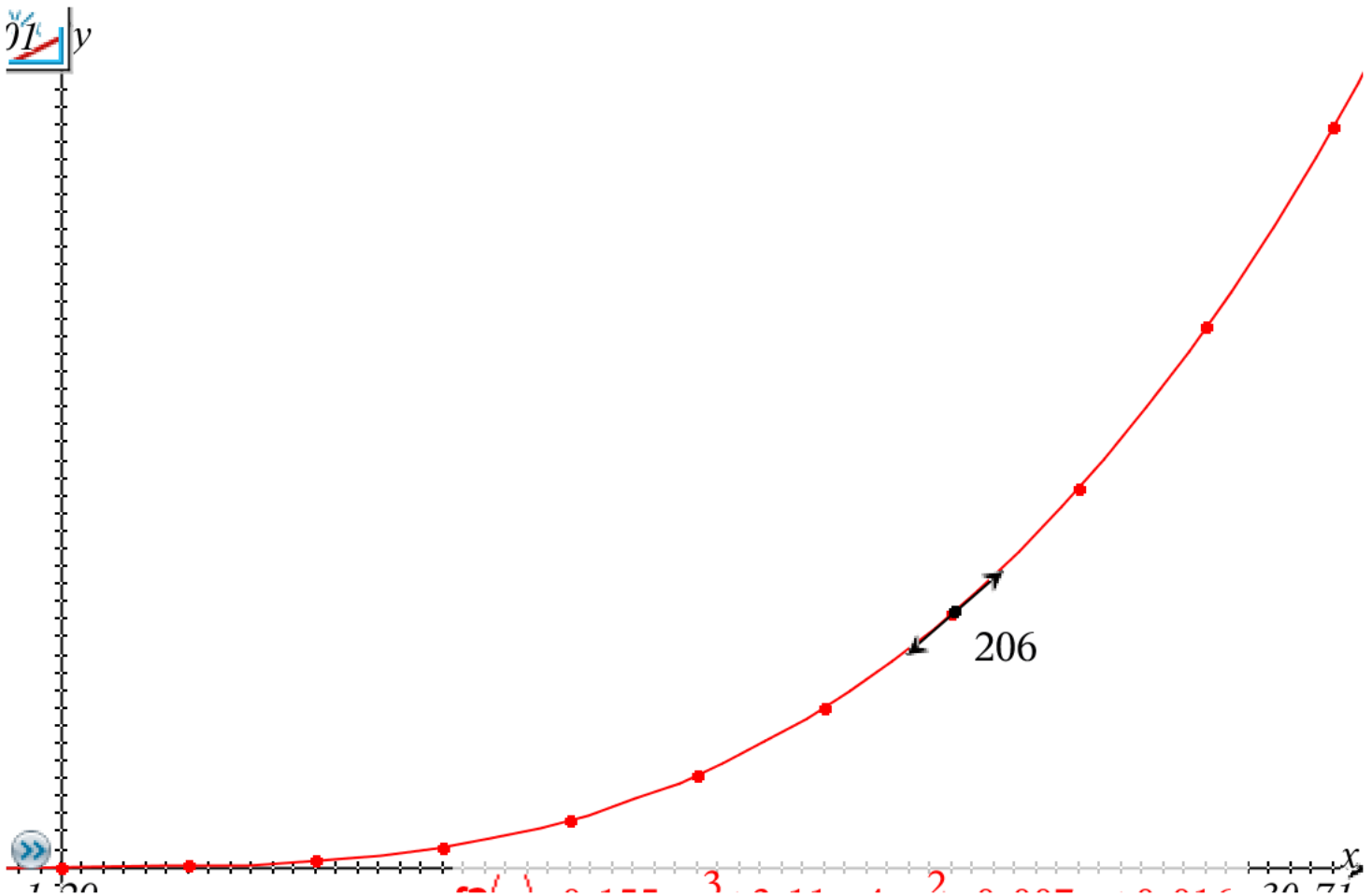
$$TVM = \frac{v(24) - v(21)}{24 - 21}$$

$$tvm = \frac{2143.6 - 1436}{24 - 21}$$

►  $tvm = 235.867$

b) La pente de la sécante représente le taux de variation moyen du volume par rapport au temps.

c) Le taux de variation positif dans ces intervalles suggère que le volume d'hélium augmente avec le temps et que le ballon prend de l'expansion.



d) Le graphique tracé représente l'augmentation du volume en fonction du temps. La pente de la tangente au point de tangence de 21 secondes représente le taux de variation instantané du volume à ce temps.

## Journal

Es-tu en accord que pour déterminer le taux de variation instantané en un point avec plus de précision, il est préférable de tracer la tangente à la courbe plutôt que d'utiliser les données de la table de valeurs. Explique ta réponse.

*Je suis en désaccord avec cet énoncé. On peut déterminer le taux de variation instantané en un point avec plus de précision en traçant la tangente à la courbe ou en utilisant les données de la table de valeurs. Pour déterminer le taux de variation instantané avec précision à l'aide d'une table de valeurs sur une calculatrice à affichage graphique, on réduit la distance entre les valeurs consécutives de  $x$ .*