Déterminer le taux de variation à l'aide d'une équation

Saviez−vous que la position d'une fusée lancée peut être modélisée par une fonction du second degré? Les ingénieures et les ingénieurs en pyrotechnie doivent établir la vitesse de la fusée et sa position au moment de l'explosion afin de synchroniser l'explosion avec la musique et de coordonner le spectacle.

Explore

Un spa extérieur contient 2700l d'eau. Il faut 3 heures pour le vider par une valve au fond du spa. Le volume d'eau dans le spa est représenté par la fonction $V(t)=((1)/(12))(180-t)^{(2)}$, où V est le volume d'eau dans le spa, en litres, et t le temps écoulé, en minutes, depuis l'ouverture de la valve. Détermine le taux de variation instantané du volume d'eau à 60 min.

Réponses aux question de la rubrique Explore (pages 13 à 15)

Partie A

Méthode 1

1. a) Les réponses varieront. Par exemple: Le graphique de cette fonction a la forme d'une parabole.
   b) Domaine : $t \in [0, 180]$; les réponses varieront. Par exemple : Le domaine comprend le moment où le spa commence à se vider jusqu'au moment où il est complètement vide, 180 min plus tard.
   c) $V(60) = 1\ 200$. Le résultat est exprimé en l. Calculer le volume pour $t = 60$ n'apprend rien sur le taux de variation du volume de l'eau par rapport au temps pour $t = 60$. On apprend uniquement la quantité d'eau qui reste dans le spa pour $t = 60$. Pour déterminer le taux de variation, il faut calculer la pente de la tangente à la courbe en $t = 60$.

2.

Point de tangence, P	Échelon de temps (min)	Second point, Q	Pente de la sécante PQ
(60, 1 200)	5	(65, 1 140,8)	$\frac{1\ 140{,}8 - 1\ 200}{65 - 60} \approx -19{,}7$
(60, 1 200)	1	(61, 1 180,1)	$\frac{1\ 180{,}1 - 1\ 200}{61 - 60} \approx -19{,}9$
(60, 1 200)	0,1	(60, 1, 1 198)	$\frac{1\ 198 - 1\ 200}{60{,}1 - 60} \approx -20$
(60, 1 200)	0,01	(60,01, 1 199,8)	$\frac{1\ 199{,}8 - 1\ 200}{60{,}01 - 60} \approx -20$
(60, 1 200)	0,001	(60,001, 1 199,98)	$\frac{1\ 199{,}98 - 1\ 200}{60{,}001 - 60} \approx -20$
(60, 1 200)	0,000 1	(60,000 1, 1 199,998)	$\frac{1\ 199{,}998 - 1\ 200}{60{,}000\ 1 - 60} \approx -20$

3. Les réponses varieront. Par exemple :
   a) La pente de PQ est négative, car le niveau d'eau diminue à mesure que le temps augmente.
   b) La pente de PQ s'approche de la valeur -20 à mesure que l'échelon de temps diminue. Cela a du sens puisque la pente de la sécante PQ se rapproche de la pente de la tangente à la courbe au point P à mesure que le point Q s'approche du point P.
4. a) La pente de la tangente en P(60, 1 200) est -20.
   b) Les réponses varieront. Par exemple: Pour obtenir une estimation plus précise de la pente de la tangente en P(60, 1 200), on peut déterminer un second point Q à gauche du point P, puis calculer la pente de la sécante PQ à mesure que l'échelon de temps diminue.

Méthode 2

1. a) (60, 1 200)
   b) Détermine un second point $Q(x, V(x)) = Q\left[x, \left(\frac{1}{12}\right)(180 - x)^2\right]$
2. Pente de la sécante PQ : $\dfrac{\left(\frac{1}{12}\right)(180 - x)^2 - 1\ 200}{x - 60}$
3. L'expression de la question 2 n'est pas valable pour $x = 60$. Si x était égal à 60, le dénominateur de l'expression serait égal à 0. Cela est impossible puisque la division par 0 n'est pas définie dans le système des nombres réels.
4. $\dfrac{1\ 500 - 30x + \frac{1}{12}x^2}{x - 60}$
5. Les réponses varieront. Par exemple :
   c) Les valeurs de sortie pour Y1 représentent la pente de la sécante PQ, qui représente le taux de variation moyen de l'eau dans le spa en fonction du temps. À mesure que la distance entre les points P et Q diminue, la pente de la sécante PQ se rapproche de la pente de la tangente à la courbe au point P, qui représente le taux de variation instantané de l'eau dans le spa en fonction du temps.
   d) Pour améliorer la précision de cette valeur, on peut réduire de plus en plus les échelons de temps entre les points P et Q.

Partie B

1. Les réponses varieront. Par exemple : Soit $x = 6$.

Point de tangence P P(a, V(a))	Échelon de temps (min)	Second Point Q(a + h, V(a + h))	Pente de la sécante $\frac{V(a + h) - V(a)}{(a + h) - a}$
(6, 2 523)	3	(9, 2 436,8)	−14,37
(6, 2 523)	1	(7, 2 494,08)	−28,92
(6, 2 523)	0,1	(6,1, 2 520,10)	−29
(6, 2 523)	0,01	(6,01, 2 522,71)	−29
(6, 2 523)	0,001	(6,001, 2 522,971)	−29
(6, 2 523)	0,000 1	(6,000 1, 2 522,997)	−29

2. a) Les réponses varieront. Par exemple: La pente de la tangente en $P(a, V(a))$ est -29.
   b) La pente de la tangente en $P(a, V(a))$ est = 29.
3. Les réponses varieront. Par exemple: Le taux de variation moyen peut servir à déterminer la pente d'une sécante. Le taux de variation instantané peut servir à déterminer la pente d'une tangente, comme dans la section 1.1. On peut aussi déterminer la pente de la tangente à une courbe en un point à l'aide de points à gauche ou à droite du point afin d'obtenir des valeurs d'échelons de temps de plus en plus petites, puis calculer la limite, qui est la pente de la tangente. Les résumés varieront.
4. Les réponses varieront. Par exemple : La formule de la pente dans le tableau peut servir à estimer la pente de la tangente à une courbe en un point. Pour y arriver, on calcule la pente de la sécante à l'aide de points à gauche ou à droite du point pour obtenir des valeurs d'échelons de temps de plus en plus petites.

Réponses aux questions de la rubrique Communication et compréhension (page 19)

C1 Les réponses varieront. Par exemple : Une équation donne une estimation plus précise du taux de variation instantané qu'une table de valeurs, puisqu'on travaille avec une seule équation dans chaque cas.

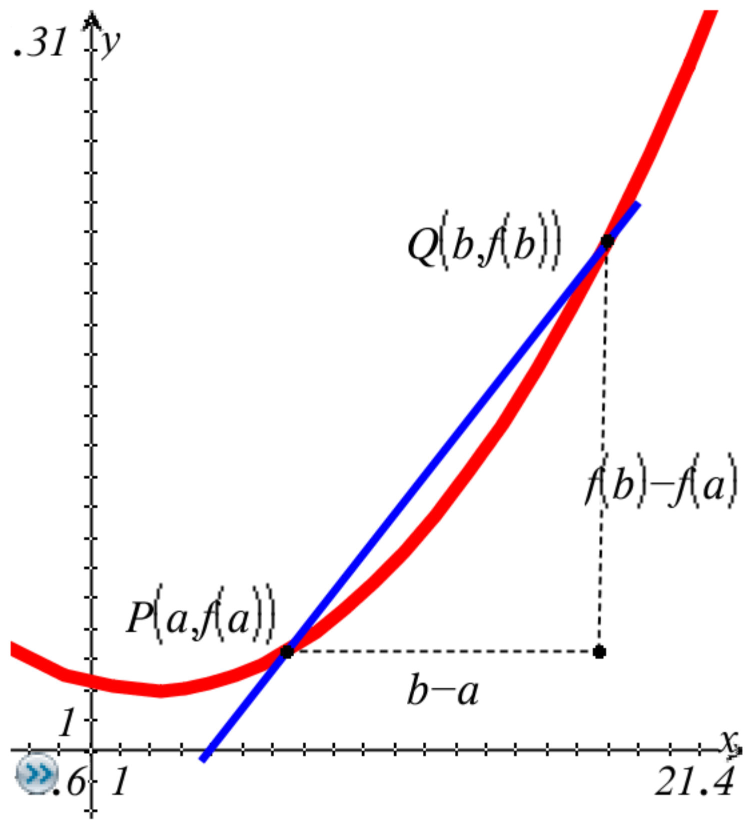
C2 Les réponses varieront. Par exemple : Quand on réduit l'intervalle, h, le second point de la sécante se déplacera le long de la courbe et s'approchera du premier point de la sécante. Par conséquent, la sécante s'approchera de la tangente et la pente de la sécante s'approchera de la pente de la tangente.

C3 Les réponses varieront. Par exemple : L'intervalle, h, est le dénominateur de l'expression $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$. Pour évaluer cette expression, il faudrait diviser le numérateur par zéro. Toutefois, la division par zéro n'est pas définie dans le système des nombres réels. Si on divise un nombre par zéro, puis qu'on multiplie le résultat par zéro, on devrait obtenir le nombre de départ. La multiplication de tout nombre par zéro donne zéro. Puisqu'il n'existe pas de nombre qui, une fois multiplié par zéro, ne donne pas zéro, la division par zéro n'est pas définie. Donc, l'intervalle, h, ne peut pas être égal à zéro dans l'expression.

Détermine la pente de la tangente à partir d'une suite des pentes de sécantes

Soit la fonction, y = f(x). Si on connaît son équation, on peut déterminer le taux de variation moyen sur un intervalle [a, b] en calculant la pente de la sécante :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



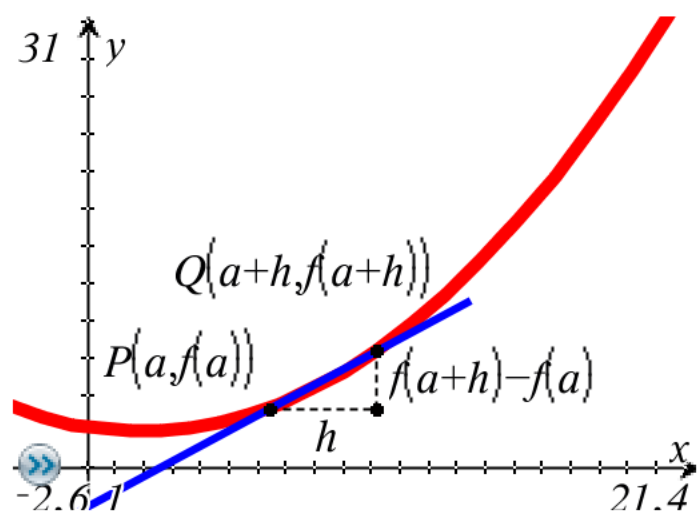
Si h représente l'intervalle entre deux points sur l'axe des x, on peut définir ces deux points par rapport à a, donc a et (a+h). Les deux extrémités de la sécante sont alors : (a, f(a)) et (a+h, f(a+h)).

La pente de la sécante qui relie les points est donc :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}, h\neq 0$$

Voir la page 16 du manuel pour plus de diagrammes.



Exemple

Ahmed lave la fenêtre sur le balcon de sa tante. Le balcon est situé à 90 m au−dessus du sol. Accidentellement, Ahmed fait tomber un pot de fleurs en bas du balcon.

a) Définis une expression algébrique qui représente le taux de variation moyen de la hauteur au−dessus du sol du pot de fleurs en chute libre. (Rappel : Objet en chute libre : s(t)=d−4,9t^(2)).

b) Détermine le taux de variation moyen de la hauteur du pot de fleurs dans l'intervalle de 1 à 3 s après le début de sa chute.

c) Estime le taux de variation instantané de la hauteur du pot de fleurs à 1s, puis à 3s.

d) Détermine l'équation de la tangente en t = 1. Esquisse un graphique de la courbe et de la tangente en t = 1.

a) $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{90-4{,}9(a+h)^2-(90-4{,}9a^2)}{h}$

$=\frac{90-4{,}9(a^2+2ah+h^2)-90+4{,}9a^2}{h}$

$=\frac{-4{,}9a^2-9{,}8ah-4{,}9h^2+4{,}9a^2}{h}$

$=\frac{-9{,}8ah-4{,}9h^2}{h}$

$=-9{,}8a-4{,}9h, h\neq 0$

b) $\frac{\Delta s}{\Delta t}=-9{,}8(1)-4{,}9(2)$

$=-19{,}6 m/s$

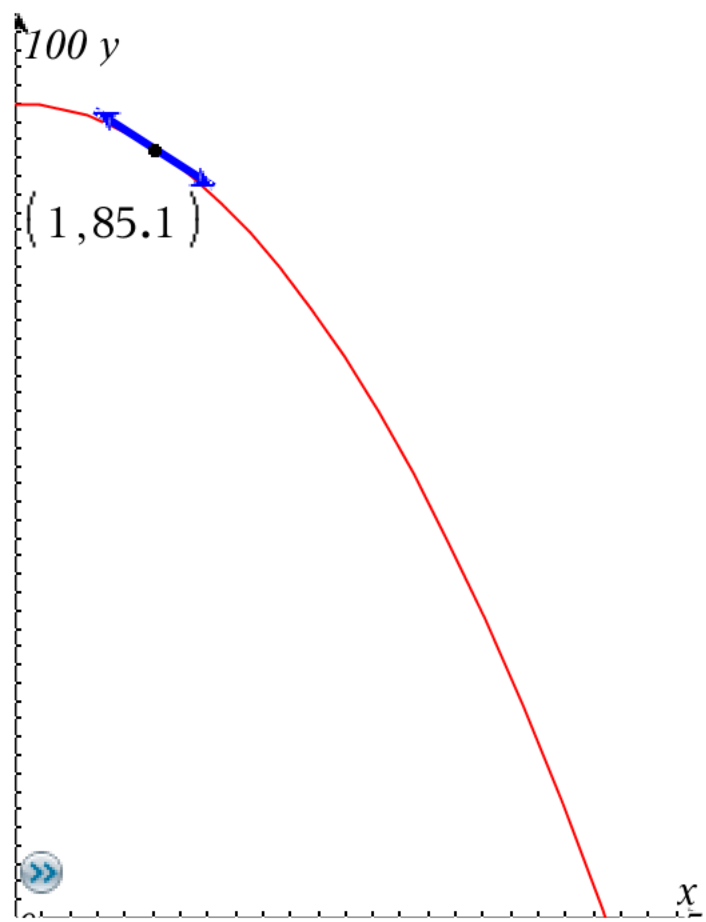
Entre 1s et 3s, le taux de variation moyen de la hauteur du pot de fleurs est de −19,6m/s. Le résultat négatif indique que le pot de fleurs se déplace vers le bas.

	A a	B h	C tvm	D	E
◆			=-9.8*a[]−4.9*b[]		
1	1	0.01	-9.849		
2	1	0.001	-9.8049		
3	3	0.01	-29.449		
4	3	0.001	-29.4049		

C1 =-9.849

c) D'après ces données, il semble que la pente de la sécante s'approche de −9,8m/s à 1s et de −29,4m/s à 3s.

d) Pour déterminer l'équation de la tangente en t=1, trouve d'abord le point de tangence en reportant les valeurs connues dans l'équation initiale.



$s(1)=90-4,9(1)^2$

$s(1)=85,1$

Le point de tangence est (1,85,1).

$y=mx+b$

$85,1=-9,8(1)+b$

$94,9=b$

L'équation de la tangente à (1,85,1) est $s=-9,8t+94,9$.