

Le maximum ou le minimum d'une fonction du second degré

Applications

Exemple 1

Rachel et Ken tricotent des foulards pour les vendre dans une foire artisanale. La laine de chaque foulard coûte 6\$. Ils ont prévu vendre chaque foulard 10\$, le même prix que l'année précédente; ils en avaient alors vendu 40. Toutefois, ils savent qu'une hausse du prix augmenterait leurs bénéfices, même s'ils vendent un peu moins de foulards. On leur a dit que pour chaque augmentation de prix de 0,50\$, ils doivent s'attendre à vendre 4 foulards de moins. Quel prix de vente maximisera leurs bénéfices et quel sera alors le montant des bénéfices?

Soit x , le nombre d'augmentations du prix de vente et B , les bénéfices en dollars.

$$\text{Donc, } B(x) = (4 + 0,5x)(40 - 4x)$$

$B(x) = 160 + 4x - 2x^2$ – on cherche un maximum, donc, je vais compléter le carré pour trouver le sommet.

$$\begin{aligned} B(x) &= -2x^2 + 4x + 160 \\ &= -2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 160 \\ &= -2(x - 1)^2 + 162 \end{aligned}$$

Le prix de vente qui maximisera le bénéfice est 10,50\$ et le montant des bénéfices est de 162\$.

Exemple 2

Josée lance une balle, qui suit une trajectoire parabolique à cause de la force gravitationnelle. La hauteur, h , en mètres, de la balle par rapport au sol au bout de t secondes est modélisée par $h(t) = -4,9t^2 + 40t + 1,5$. Détermine le temps qu'il faut à la balle pour atteindre sa hauteur maximale et la hauteur maximale atteinte par la balle.

Puisqu'on cherche la hauteur maximale, il faut trouver le sommet. Dans cet exemple, je vais utiliser la factorisation partielle.

$$\text{Soit } g(t) = -4,9t^2 + 40t$$

$$g(t) = -4,9t(t - 8,16)$$

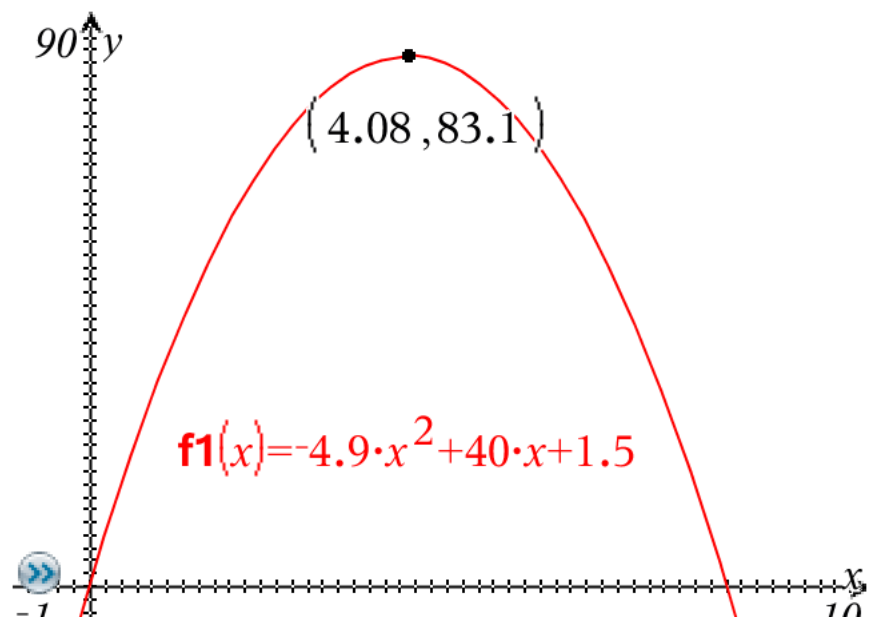
Donc, les abscisses sont 0 et 8,16.

Et, l'axe de symétrie est à $x = 4,08$ (le milieu de 0 et 8,16).

$$\text{Le sommet est donc } h(4,08) = -4,9(4,08)^2 + 40(4,08) + 1,5$$

$$h(4,08) = 83,16$$

La hauteur maximale atteinte par la balle est de 83,16m au temps 4,08 secondes.



Exemple 3

La somme de deux nombres est 10. Quel est le produit maximal de ces nombres?

Soit x , le premier nombre et P , le produit.

$$P(x) = x(10 - x)$$

$$P(x) = -x^2 + 10x$$

Méthode 1 : Compléter le carré

$$P(x) = -1(x^2 - 10x + 25 - 25)$$

$$= -1(x - 5)^2 + 25$$

Le produit maximal est de 25.

Méthode 2 : Factorisation partielle

$$P(x) = x(10 - x)$$

Les abscisses sont 0 et 10.

Donc, l'axe de symétrie est de $x = 5$.

$$P(5) = 5(10 - 5)$$

$$= 25$$

Le produit maximal est de 25.

