Le maximum ou le minimum d'une fonction du second degré

Certains ponts ont une ou des arches définies par une fonction du second degré. Les ingénieures et ingénieurs se servent de fonctions du second degré pour déterminer la hauteur maximale d'une arche ou la hauteur libre à divers endroits sous celle−ci. Ils peuvent ensuite transmettre ces renseignements aux responsables de la construction.

Les différentes formes de la fonction du second degré :

− La forme générale : $y=ax^2+bx+c$

− La forme factorisée : $y=a(x-r)(x-s)$

− La forme canonique : $y=a(x-h)^2+k$

Rappel : Compléter le carré

Un processus qui permet de convertir l'équation d'une fonction du second degré de la forme générale à la forme canonique.
On utilise la forme canonique lorsqu'on cherche à identifier le sommet.

Rappel : Trinôme carré parfait

Un trinôme carré parfait doit se présenter sous la forme Ax^2 + Bx + C.
Il doit respecter les conditions suivantes:
*A et C doivent être des carrés (1,4,9,16,25,36,...);
*Bx doit être égale à 2 multiplié par la racine de Ax2 multiplié par la racine de C.

Exemples de trinôme carré parfait :

$x^2+6x+9 - \textit{factorisée} = (x+3)^2$

$4x^2+20x+25 - \textit{factorisée} = (2x+5)^2$

Exemple 1
Détermine le sommet du graphique de chaque fonction en complétant le carré. Le sommet est−il un maximum ou un minimum?

a) $f(x)=x^2+6x+8$

$f(x)=x^2+6x+8$
$=(x^2+6x+9-9)+8$

Afin de trouver 9, il faut faire le calcul suivant $\left(\frac{6}{2}\right)^2$

$=(x+3)^2-9+8$

$=(x+3)^2-1$

$=(x+3)^2-1$

Donc, le sommet est à $(-3, -1)$ et le sommet est un minimum puisque le graphique est ouvert vers le haut (la valeur de a est positive).

b) $f(x)=x^2+5x+7$

$f(x)=x^2+5x+7$

$=\left(x^2+5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}\right)+7$

Afin de trouver $\frac{25}{4}$, il faut faire le calcul suivant $\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+7$

$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+\frac{28}{4}$

$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

Donc, le sommet est à $\left(\frac{-5}{2}, \frac{3}{4}\right)$ et le sommet est un minimum puisque le graphique est ouvert vers le haut (la valeur de a est positive).

c) $f(x)=-\frac{2}{3}x^2+8x+5$

$$f(x)=-\frac{2}{3}x^2+8x+5$$

$$=-\frac{2}{3}\left(x^2-12x+36-36\right)+5$$ Afin de trouver 36, il faut faire le calcul suivant

$$\left(\frac{-12}{2}\right)^2$$

$$=-\frac{2}{3}(x-6)^2+\frac{72}{3}+5$$

$$=-\frac{2}{3}(x-6)^2+24+5$$

$$=-\frac{2}{3}(x-6)^2+29$$

Donc, le sommet est à $(6,\ 29)$ et le sommet est un maximum puisque le graphique est ouvert vers le bas (la valeur de a est négative).