Les limites et la continuité

Mise en situation

Une conductrice gare sa voiture dans un stationnement. Le tarif de stationnement est de 3$ pour 20 minutes ou moins, puis de 2$ pour chaque période additionnelle de 20 minutes ou moins. Quelle somme la conductrice devra–t–elle payer pour 1 heure?

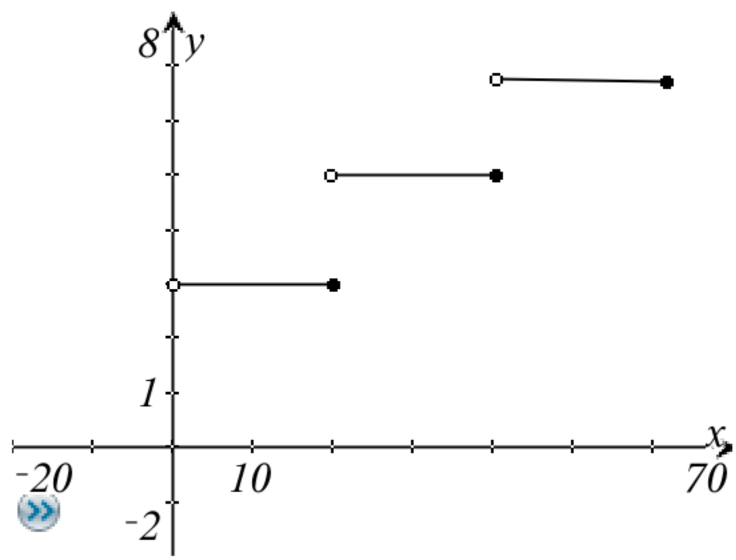
Solution

La conductrice doit 7$ pour 1 heure.

On peut représenter cette situation par une **fonction définie par intervalles**, c'est–à–dire une fonction composée de parties de deux ou plusieurs fonctions. On l'appelle aussi **"fonction en escalier"**, car les segments de droites horizontaux de son graphique ressemblent aux marches d'un escalier.

Soit C(d) le coût du stationnement, en dollars, et d, la durée, en minutes.

$$C(d)=\begin{cases} 3, 0<d\leq 20 \\ 5, 20<d\leq 40 \\ 7, 40<d\leq 60 \end{cases}$$



Explore

Quelle relation existe–t–il entre les limites, la continuité et la discontinuité?

p. 34 #1 –3

Explore B

1. a) Les réponses varieront. Par exemple : Le graphique A est continu. Il n'y a pas de coupure.

   b) i) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$

   ii) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$

   iii) $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

   iv) $f(2) = 3$

   c) Les valeurs obtenues en b) sont toutes égales à 3. Les valeurs sont identiques.

   d) Les réponses varieront. Par exemple :
   Pour le graphique A, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$.
   Puisque les valeurs sont égales, le graphique est continu.

2. a) Les réponses varieront. Par exemple : Le graphique B est discontinu. Il y a une coupure en $x = 2$.

   b) i) $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3$

   ii) $\lim_{x \to 2^+} g(x) = 4$

   iii) $\lim_{x \to 2} g(x)$ n'existe pas.

   iv) $g(2) = 3$

   c) Les valeurs obtenues en b) ne sont pas égales. Les valeurs ne sont pas identiques.

   d) Pour le graphique B, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = 3$, mais $\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2} f(x)$.
   Puisque les valeurs ne sont pas toutes égales, le graphique est discontinu.

3. a) Les réponses varieront. Par exemple : Le graphique C est discontinu. Il y a une coupure en $x = 2$.

   b) i) $\lim_{x \to 2^-} h(x) = 3$

   ii) $\lim_{x \to 2^+} h(x) = 4$

   iii) $\lim_{x \to 2} h(x)$ n'existe pas

   iv) $h(2) = 6$

   c) Les valeurs obtenues en b) ne sont pas égales. Les valeurs ne sont pas identiques.

   d) Pour le graphique C, $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2) \neq \lim_{x \to 2} f(x) \neq \lim_{x \to 2} f(x)$.
   Puisque les valeurs ne sont pas égales, le graphique est discontinu.

4. a) Les réponses varieront. Par exemple : Les graphiques A, B et C ont une forme semblable sur l'intervalle $x \in]-\infty, 2[$ (partie d'une parabole) et sur l'intervalle $x \in]2, \infty[$ (partie d'une droite).

   b) Les réponses varieront. Par exemple : Une fonction $y = f(x)$ est continue sur un intervalle si pour toute valeur de a dans son domaine, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Une fonction $y = f(x)$ est discontinue sur un intervalle si pour toute valeur de a dans son domaine, $\lim_{x \to a} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Déterminer une limite de façon algébrique

Les propriétés des limites

À copier − le tableau p. 35

Exemple

Évalue chaque limite, si elle existe, puis indique la ou les propriétés utilisées.

a) $\lim_{x\to -1}(5)=5$ propriété 1

b) $\lim_{x\to 2}(3x^4-5x)=3\left(\lim_{x\to 2}(x)\right)^4-5\lim_{x\to 2}(x)$ propriétés 4,5 et 8

$=3(2)^4-5(2)$ propriété 2

$=38$

c) $\lim_{x\to -3}\left(\sqrt{2x+5}\right)=\sqrt{2\lim_{x\to -3}(x)+\lim_{x\to -3}(5)}$ propriétés 3, 5 et 9

$=\sqrt{2(-3)+5}$ propriétés 1 et 2

$=\sqrt{-1}$

Puisque $\sqrt{-1}$ n'est un nombre réel, $\lim_{x\to -3}\left(\sqrt{2x+5}\right)$ n'existe pas.

d) $\lim_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2+3}\right)=\dfrac{\left(\lim_{x\to -1}(x)\right)^2-\lim_{x\to -1}(4)}{\left(\lim_{x\to -1}(x)\right)^2+\lim_{x\to -1}(3)}$ propriétés 3, 4, 7, 8

$=\dfrac{(-1)^2-4}{(-1)^2+3}$ propriétés 1 et 2

$=\dfrac{-3}{4}$

e) $\lim_{x\to 0}(x-3)(5x^2+2)=\left[\lim_{x\to 0}(x)-\lim_{x\to 0}(3)\right]\left[5\left(\lim_{x\to 0}(x)\right)^2+\lim_{x\to 0}(2)\right]$

propriétés 3,4,6,8

$=(0-3)(5(0)^2+2)$ propriétés 1 et 2

$=-6$

f) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{5x}{x-2}\right)=\frac{5\lim_{x\to 2}(x)}{\lim_{x\to 2}(x)-\lim_{x\to 2}(2)}$ | propriétés 4,5 et 7

$=\frac{5(2)}{2-2}$ propriétés 1 et 2

$=\frac{10}{0}$

La division par zéro est indéfinie, donc $\lim_{x\to 2}\left(\frac{5x}{x-2}\right)$ n'existe pas.