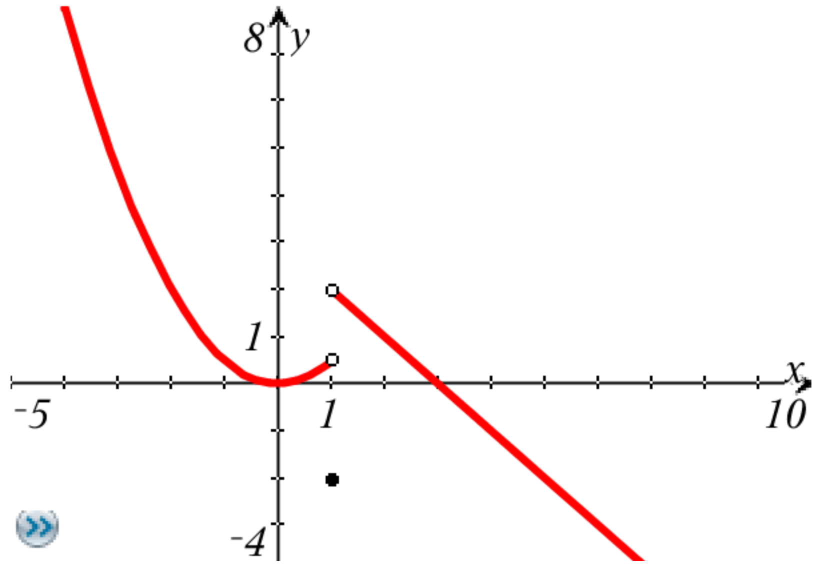
Les limites et la continuité (suite)

Exemple

Examine ce graphique.



$$f(x)=\begin{cases}0{,}5x^2, si\ x<1\\ -2, \quad si\ x=1\\ -x+3, si\ x>1\end{cases}$$

a) Indique le domaine de la fonction.

$\{x\in\mathbb{R}\}$

b) Évalue les éléments suivants :

I) $\lim\limits_{x\to 1^+}(f(x))=2$

II) $\lim\limits_{x\to 1^-}(f(x))=0{,}5$

III) $\lim\limits_{x\to 1}(f(x))$ n'existe pas

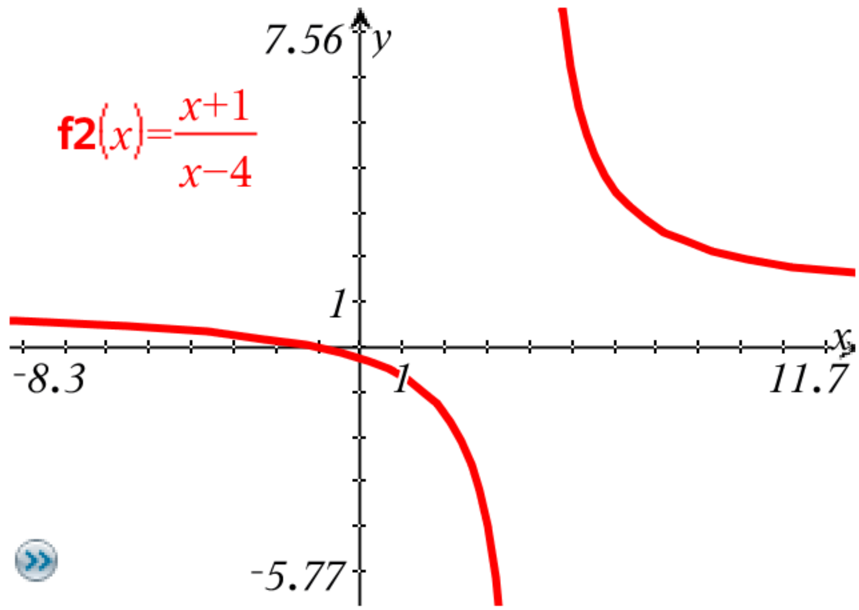
IV) $f(1)=-2$

c) La fonction est−elle continue ou discontinue en x=1? Explique ta réponse.

En x=1, les limites unilatérales existent, mais elles ne sont pas égales. La fonction est coupée ou discontinue en x=1. La valeur de y sur le graphique passe de 0,5 à 2 en x=1. Ce type de discontinuité se nomme **discontinuité en un point ou "saut".**

Exemple

Examine ce graphique.



a) Indique le domaine de la fonction.

$\{x \neq 4, x \in \mathbb{R}\}$

b) Évalue les éléments suivants :

I) $\lim\limits_{x \to 4^{+}} (f(x)) = +\infty$

II) $\lim\limits_{x \to 4^{-}} (f(x)) = -\infty$

III) $\lim\limits_{x \to 4} (f(x))$ n'existe pas

IV) $f(4)$ n'existe pas

c) La fonction est–elle continue ou discontinue en x=4? Explique ta réponse.

Cette fonction est non définie en x=4. Puisque les valeurs de y augmentent ou diminuent sans limite lorsque x s'approche de 4, cette fonction a une discontinuité infinie en x=4.

Exemple

Examine ce graphique.

a) Indique le domaine de la fonction.

$\{x \in \mathbb{R}\}$

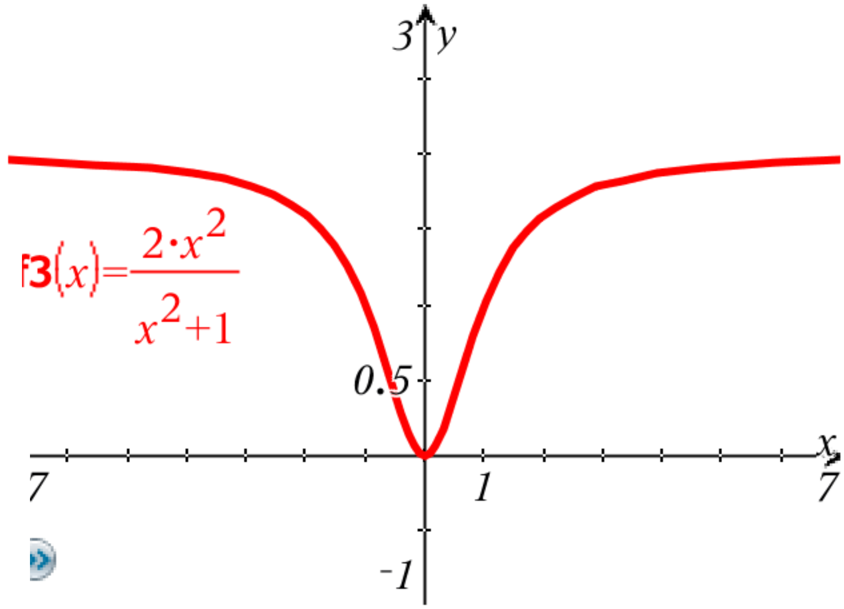
b) Évalue les éléments suivants :

I) $\lim_{x \to 0^+} (f(x)) = 0$

II) $\lim_{x \to 0^-} (f(x)) = 0$

III) $\lim_{x \to 0} (f(x)) = 0$

IV) $f(0) = 0$



c) La fonction est−elle continue ou discontinue en x=4? Explique ta réponse.

Cette fonction est continue pour toutes les valeurs de x, puisqu'il n'y a pas de coupure dans le graphique.

La forme indéterminée d'une limite (0/0)

Une limite peut exister même si la fonction n'est pas définie en ce point.
La forme indéterminée signifie simplement qu'il est impossible de déterminer la limite par substitution. Il faut trouver une fonction équivalente qui représente f(x) pour toutes les autres valeurs de x autres que x=a.

La méthode habituelle consiste à trouver des facteurs et à simplifier avant de prendre la limite. On dit qu'une telle fonction a un "trou" ou une **discontinuité apparente.**

Exemple

Évalue chaque limite, si elle existe.

a) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-5)(x-1)}{(x-2)(x-1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-5}{x-2}\right)$$

$$=\frac{1-5}{1-2}$$

$$=4$$

b) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(4+x)-4}{x(\sqrt{4+x}+2)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

c) $\lim\limits_{x \to -3} \left(\dfrac{(1+x)^2 - 4}{x+3} \right) = \lim\limits_{x \to -3} \left(\dfrac{1+2x+x^2-4}{x+3} \right)$

$$= \lim_{x \to -3} \left(\frac{x^2+2x-3}{x+3} \right)$$

$$= \lim_{x \to -3} \left(\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)} \right)$$

$$= \lim_{x \to -3} (x-1)$$

$$= -3-1$$

$$= -4$$

Exemple

Le gérant du Café Mousseux détermine que la demande pour une nouvelle saveur de café est représentée par la fonction D(p), où p représente le prix d'une tasse, en dollars, et D, le nombre de tasses vendues à ce prix.

$$D(p) = \begin{cases} \dfrac{16}{p^2}, si\ 0 < p \leq 4 \\ 0, \quad si\ p > 4 \end{cases}$$

a) Détermine la valeur de chaque limite.

$\lim\limits_{p \to 4^-} (D(p)) = \dfrac{16}{4^2}$

$= 1$

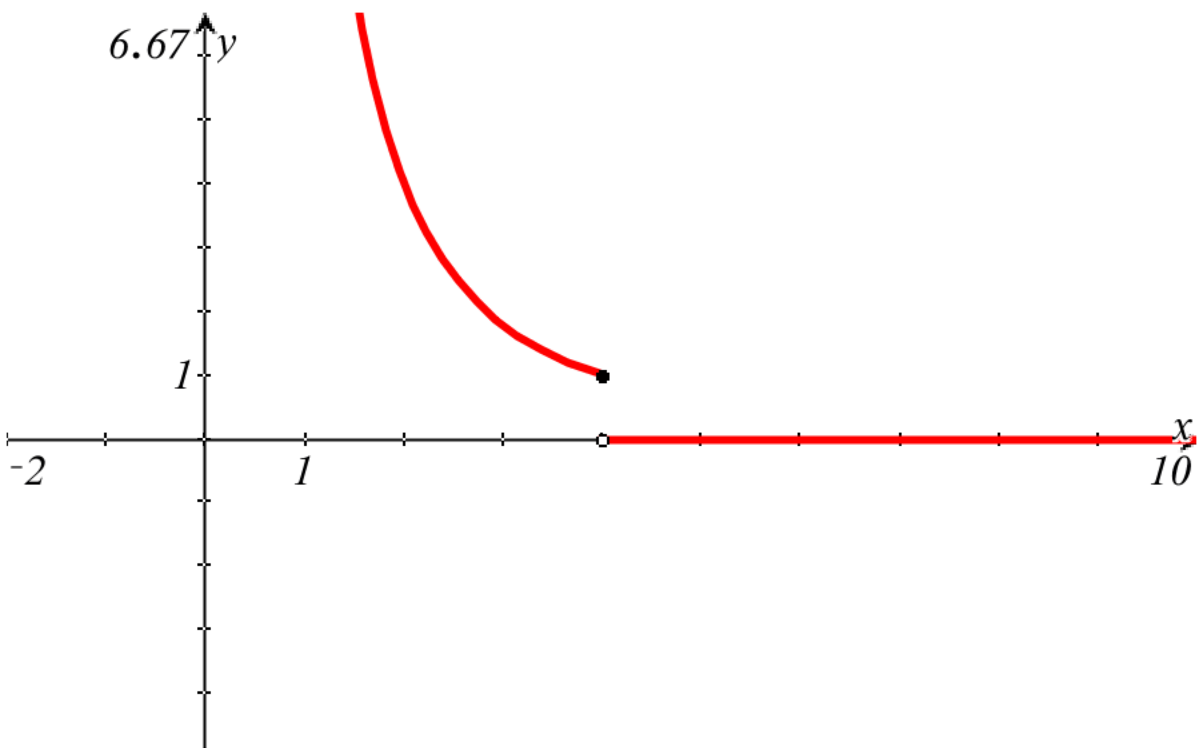
$\lim\limits_{p \to 4^+} (D(p)) = 0$

$\lim\limits_{p \to 4} (D(p))$ *n'existe pas.*

b) Interprète ces limites.

La limite de la gauche signifie qu'à mesure que le prix du café s'approche de 4$, le nombre de cafés vendus tend vers 1.
La limite de la droite signifie qu'on ne vend aucun café quand le prix est supérieur à 4$.

c) Représente graphiquement la fonction à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique. Comment le graphique confirme−t−il tes résultats en a).



Le graphique montre que le nombre de cafés vendus diminue à mesure que le prix s'approche de 4$. Quand le prix est supérieur à 4$, on ne vend aucun café.