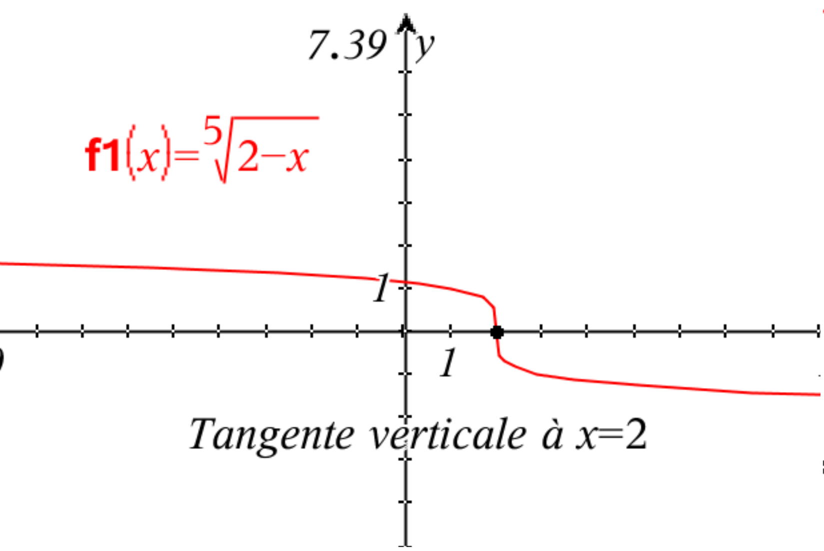
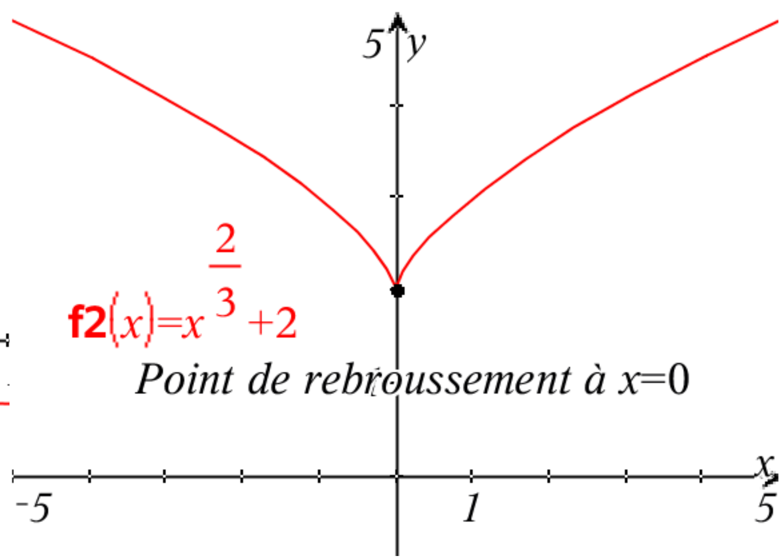
1.5 Les fonctions non dérivables

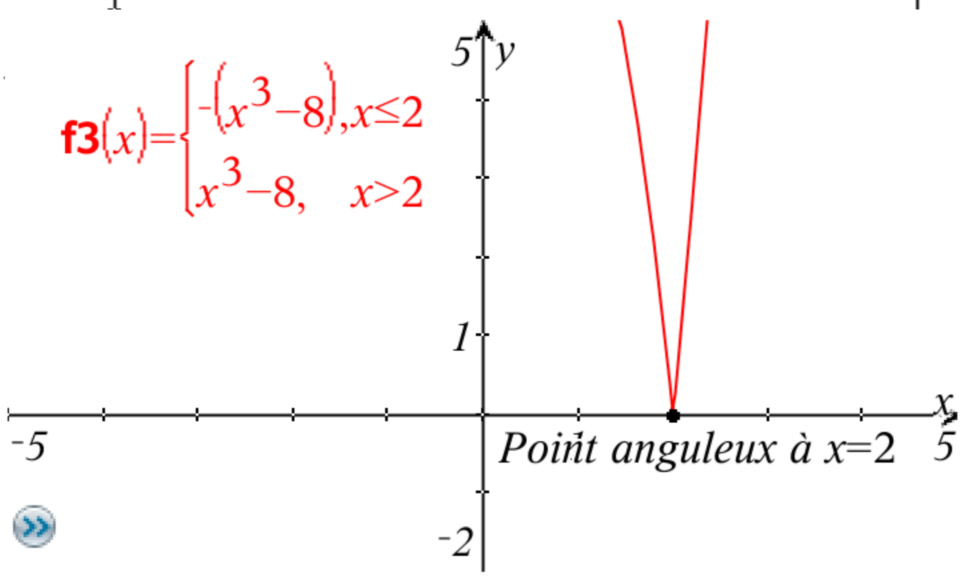
Certains points d'une courbe peuvent ne pas avoir de dérivée.

Les **fonctions discontinues sont non dérivables** en tout point où elles sont discontinues.

Certaines fonctions continues sont aussi non dérivables en certains points.
– là où elle admet une ***tangente verticale***
– là où elle connaît un changement abrupte (***point anguleux ou un point de rebroussement***)



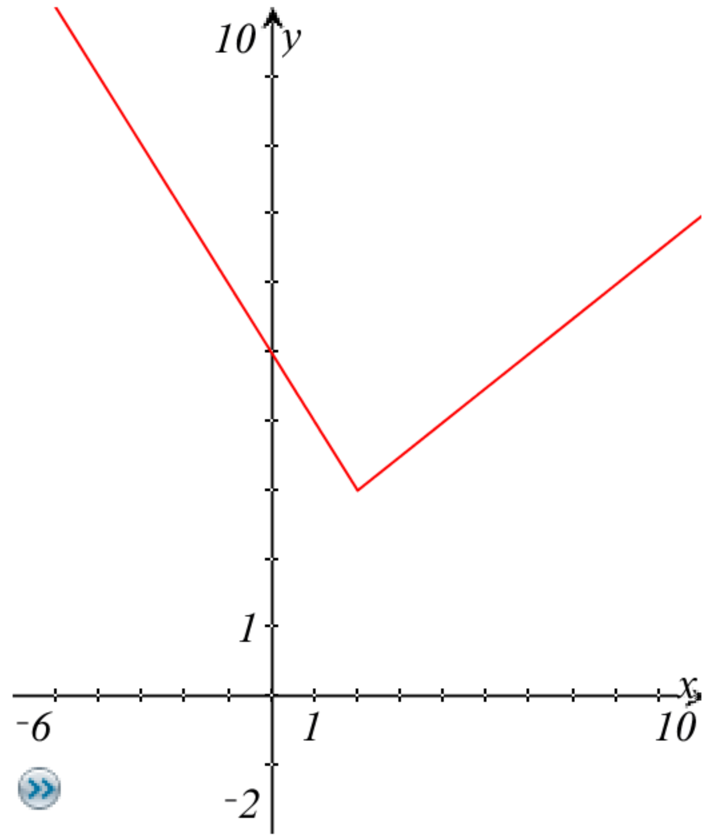




Exemple

Une fonction définie par intervalle f est définie par :

$$f(x)=\begin{cases}-x+5, & x\le 2\\ 0{,}5x+2, & x>2\end{cases}$$



Le graphique consiste en deux segments de droite qui forment un angle à (2,3).

a) D'après le graphique, quelle est la pente quand x s'approche de 2 par la gauche? Quelle est la pente quand x s'approche de 2 par la droite? Qu'est–ce que cela t'indique sur la dérivée en x=2?

b) À l'aide des principes de base, démontre que la dérivée f'(2) n'existe pas.

c) Représente graphiquement la pente de la tangente pour chaque valeur de x. Comment ce graphique confirme–t–il tes résultats en a) et en b)?

a) La pente du graphique est −1 pour x<2.

La pente du graphique est 0,5 pour x>2.

Les pentes ne tendent pas vers la même valeur à l'approche de x=2.

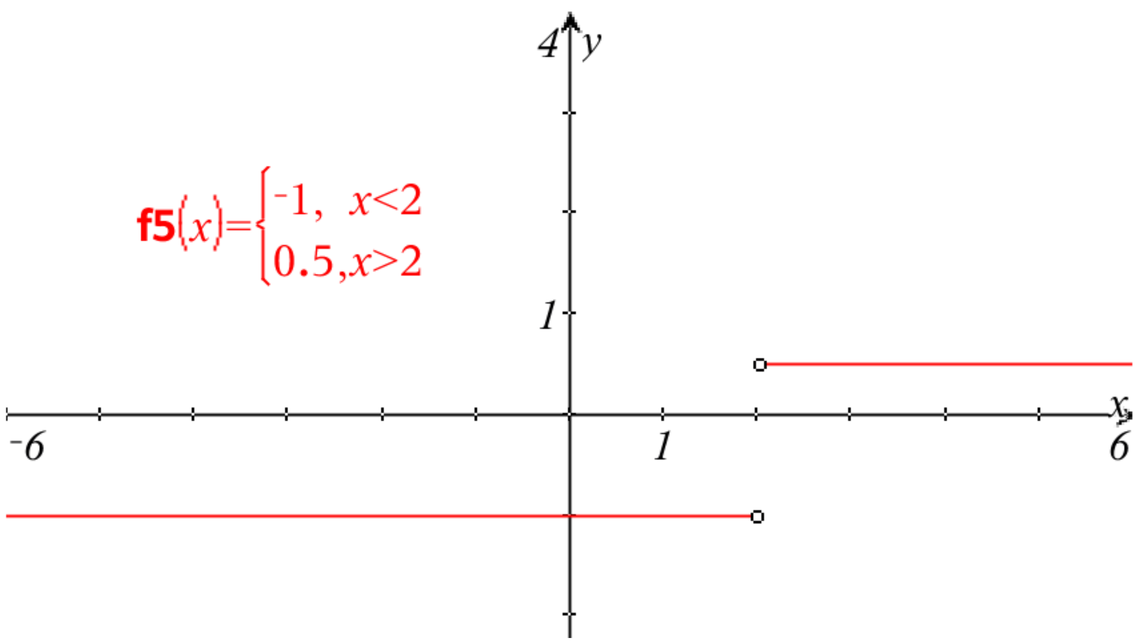
On peut donc supposer que la dérivée n'existe pas en ce point.

b) $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}\right)$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0^-}\left(\frac{-(2+h)+5-(-2+5)}{h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0^-}\left(\frac{-2-h+5-3}{h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0^-}\left(\frac{-h}{h}\right)$$
$$=-1$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{0,5(2+h)+2-(0,5(2)+2)}{h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1+0,5h+2-1-2}{h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{0,5h}{h}\right)$$
$$=0,5$$

Puisque la limite à gauche et la limite à droite ne sont pas égales, la dérivée n'existe pas en x=2.



Le graphique de la dérivée consiste en deux droites horizontales coupées en x=2. La fonction est non dérivable en ce point.