Une introduction aux dérivées (suite)

Exemple 2

a) Utilise les principes de base pour dériver f(x)=x^3. Indique le domaine de la fonction et de sa dérivée.

b) Représente graphiquement la fonction initiale et sa dérivée.

c) Évalue les expressions suivantes, puis interprète les résultats :

i) f'(−2) ii) f'(0) iii) f'(1)

d) Détermine l'équation de chacune des tangentes qui correspondent aux valeurs obtenues en c).

e) Vérifie tes équations graphiquement.

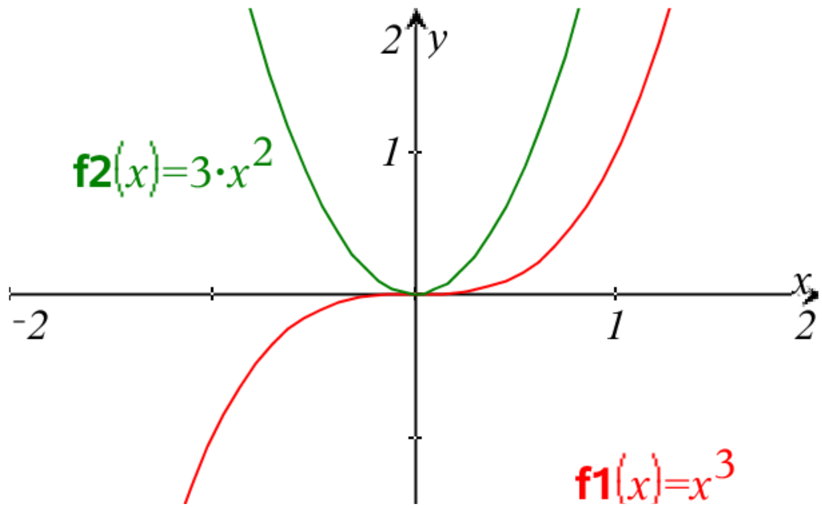
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right)$$

$$=3x^2$$



$$f'(-2)=3(-2)^2$$
$$=12$$

$$f'(0)=3(0)^2$$
$$=0$$

$$f'(1)=3(1)^2$$
$$=3$$

La tangente à (−2,−8)

$y=mx+b$

$-8=12(-2)+b$

$-8=-24+b$

$b=16$

$y=12x+16$

La tangente à (0,0)

$y=mx+b$

$0=0(0)+b$

$0=0+b$

$b=0$

$y=0$

La tangente à (1,1)

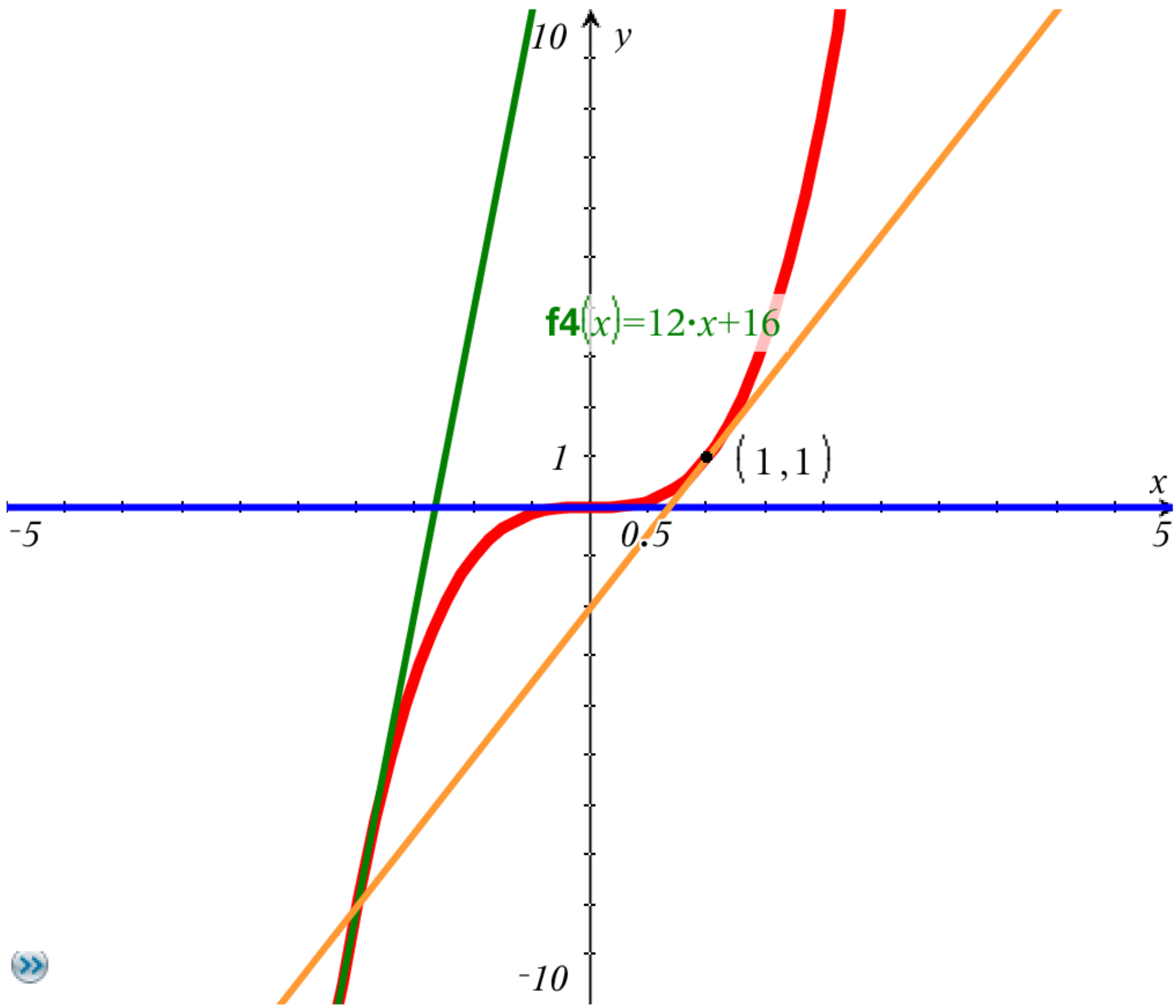
$y=mx+b$

$1=3(1)+b$

$1=3+b$

$b=-2$

$y=3x-2$



Les notations des dérivées

La notation de Lagrange

$f'(x)$ (se lit f prime de x) est une notation inventée par le mathématicien français Joseph Louis Lagrange (1736−1813). On peut aussi écrire y'

La notation de Leibniz

$\frac{dy}{dx}$ est la notation inventée par la mathématicien Leibniz. On peut aussi écrire $\frac{d}{dx}f(x)$

Exemple 3

La hauteur d'un javelot lancé dans les airs est représentée par la fonction $H(t)=-4{,}9t^2+10t+1$ où H est la hauteur, en mètres, et t, le temps, en secondes.

a) Détermine le taux de variation de la hauteur du javelot au temps t. Exprime la dérivée en notation de Leibniz.
b) Détermine le taux de variation de la hauteur du javelot après 3s.

$$\frac{dH}{dt}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{H(t+h)-H(t)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{-4{,}9(t+h)^2+10(t+h)+1-\left(-4{,}9t^2+10t+1\right)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{-4{,}9t^2-9{,}8th-4{,}9h^2+10t+10h+1+4{,}9t^2-10t-1}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(-9{,}8t-4{,}9h+10\right)$$

$$=-9{,}8t+10$$

b) $\frac{dH}{dt} = -9{,}8(3) + 10$

$= 19{,}4$

Le taux de variation instantané de la hauteur du javelot après 3s est $-19{,}4$m/s.

Exemple 4

a) Dérive la fonction y=1/x. Exprime la dérivée en notation de Leibniz.

b) Représente graphiquement la fonction et sa dérivée à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique.

c) Indique le domaine de la fonction et le domaine de sa dérivée. Comment les graphiques montrent-ils le domaine?

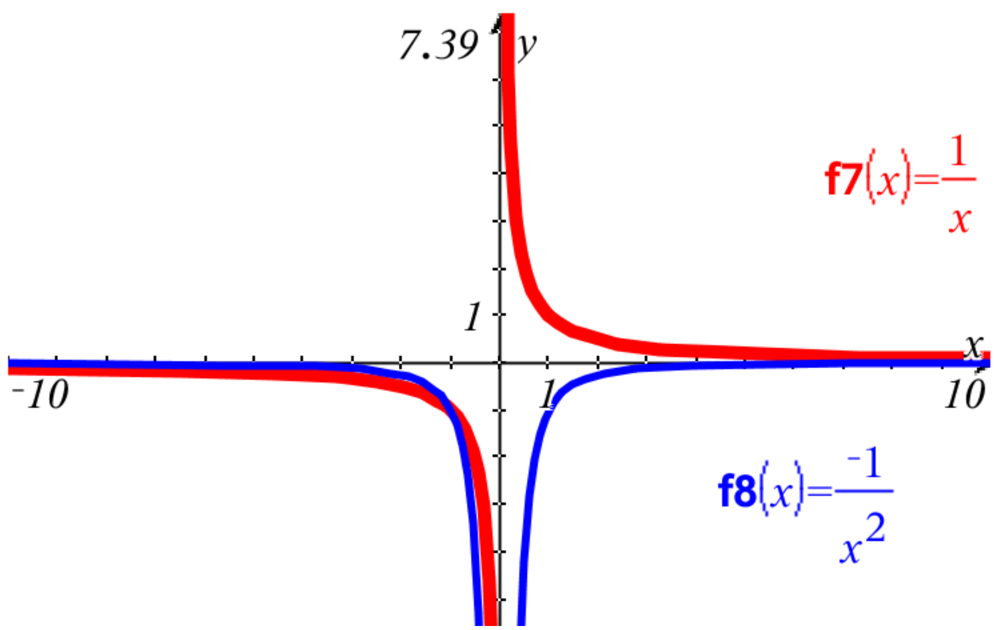
a) $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$

$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \right)$

$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} \right)$

$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{-1}{x(x+h)} \right)$

$= \frac{-1}{x^2}$



c) Le domaine de y : $\{x \neq 0, x \in \mathbb{R}\}$

Le domaine de $\frac{dy}{dx}$: $\{x \neq 0, x \in \mathbb{R}\}$