Une introduction aux dérivées

La dérivation

Une opération complexe qui est ***un des outils les plus importants et puissants du calcul différentiel.***
Ce concept a été élaboré il y a plus de deux cents ans par Sir Isaac Newton (1642−1727) et Gottfried Leibniz (1646−1716). Le résultat de cette opération se nomme la dérivée.

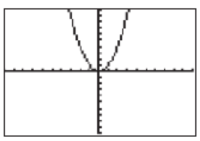
L'utilité de la dérivée

Elle sert à calculer la pente de la tangente en n'importe quel point du domaine d'une fonction.

Explore

p. 48 #1 − 8

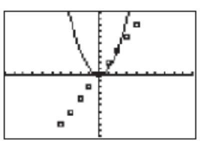
1. $y = x^2$



2.

x	Pente (m) de la tangente
−4	−8
3	6
−2	−4
−1	−2
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8

3.



Les valeurs de y dans ce nouveau graphique représentent la pente de la tangente à la courbe de la fonction $y = x^2$ à chacun des points correspondant aux valeurs de x dans le tableau.

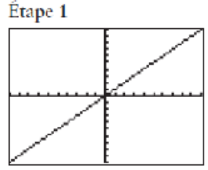
4. Le nuage de points semble représenter une fonction affine. Il faut sélectionner la régression linéaire dans le menu STAT CALC pour ces données.

5. L'équation obtenue à l'aide de la régression linéaire est $y = 2x$.

6. Les réponses varieront. Par exemple: La fonction initiale est $y = x^2$. La fonction dérivée est $y = 2x$. L'exposant de la fonction initiale est le terme constant de la fonction dérivée. Le degré de la variable est passé de 2 à 1.

7. $y = x$

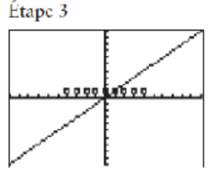
Étape 1



Étape 2

x	Pente (m) de la tangente
−4	1
−3	1
−2	1
−1	1
0	1
1	1
2	1
3	1
4	1

Étape 3



Les valeurs de y dans ce nouveau graphique représentent la pente de la tangente à la courbe de la fonction $y = x$ à chacun des points correspondant aux des valeurs de x dans le tableau.

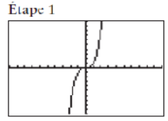
Étape 4 Le nuage de points semble représenter une fonction affine. Il faut sélectionner la régression linéaire dans le menu STAT CALC pour ces données.

Étape 5 L'équation obtenue à l'aide de la régression linéaire est $y = 1$.

Étape 6 Les réponses varieront. Par exemple : La fonction initiale est $y = x$. La fonction dérivée est $y = 1$. Le coefficient de la fonction initiale, qui est la pente de son graphique, est le terme constant de la fonction dérivée.

$y = x^3$

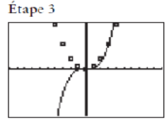
Étape 1



Étape 2

x	Pente (m) de la tangente
−4	48
3	27
−2	12
−1	3
0	0
1	3
2	12
3	27
4	48

Étape 3



Les valeurs de y dans ce nouveau graphique représentent la pente de la tangente à la courbe de la fonction $y = x^3$ à chacun des points correspondant aux valeurs de x dans le tableau.

Étape 4 Le nuage de points semble représenter une fonction du second degré. Il faut sélectionner la régression quadratique dans le menu STAT CALC pour ces données.

Étape 5 L'équation obtenue à l'aide de la régression quadratique est $y = 3x^2$.

Étape 6 Les réponses varieront. Par exemple : La fonction initiale est $y - x^3$. La fonction dérivée est $y = 3x^2$. L'exposant de la fonction initiale est le terme constant de la fonction dérivée et le degré de la variable est passé de 3 à 2.

8. Les réponses varieront. Par exemple:

a) Quand $y - f(x)$ est une fonction affine, le graphique de la dérivée $y - f'(x)$ montre une fonction constante.

b) Quand $y = f(x)$ est une fonction du second degré, le graphique de la dérivée $y = f'(x)$ montre une fonction affine.

c) Quand $y - f(x)$ est une fonction cubique, le graphique de la dérivée $y - f'(x)$ montre une fonction du second degré.

La définition de la dérivée selon les principes de base

Rappel : La formule de la pente de la tangente

Cette formule calcule la pente de la tangente au point a.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$

La dérivée d'une fonction f(x) est une nouvelle fonction f'(x) définie par :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

si la limite existe.

Exemple 1

a) Indique le domaine de la fonction f(x)=x^2.

b) Détermine la dérivée de f(x) à l'aide de la définition selon les principes de base. Quel est le domaine de la dérivée?

a) $\{x \in \mathbb{R}\}$

b) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{x^2 + 2xh - h^2 - x^2}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x - h)$$

$$= 2x, \ \{x \in \mathbb{R}\}$$