

La détermination d'une équation du second degré à partir de ses racines

Exploration

Beaucoup de ponts ont une structure de soutien en forme de parabole. Si les piliers de chaque côté du pont sont distants de 42m et que la hauteur maximale de l'arche du pont est de 26m, quelle est la fonction qui modélise cette arche?

- a) L'équation d'une fonction du second degré sous la forme factorisée est $y=a(x-r)(x-s)$, où r et s sont les abscisses à l'origine. Écris une équation sous cette forme en supposant que le sommet de l'arche se trouve sur l'axe des y et que la base de chaque pilier de l'arche est sur l'axe des x .
- b) Comment peux-tu déterminer la valeur de a à l'aide du troisième point?
- c) Réécris l'équation sous la forme générale.

$$a) y=a(x-21)(x+21)$$

b) On peut remplacer la valeur de x et y du troisième point et isoler la valeur de a .

$$26=a(0-21) \cdot (0+21)$$

$$26=a(-441)$$

$$\frac{-26}{441}=a$$

$$y=\frac{-26}{441}(x-21)(x+21)$$

$$c) y=\frac{-26}{441}(x^2+21x-21x-441)$$

$$y=\frac{-26}{441}(x^2-441)$$

$$y=\frac{-26}{441}x^2+26$$

Exemple

Détermine l'équation, sous la forme factorisée, d'une famille de fonctions du second degré ayant les abscisses à l'origine données. Représente graphiquement au moins trois fonctions de chaque famille dans le même plan cartésien.

DÉFINITION : UNE FAMILLE DE FONCTIONS

Un groupe de fonctions qui ont une caractéristique commune est appelé une "famille". Les droites parallèles sont un exemple de famille de fonctions. Les paraboles ayant les mêmes abscisses forment aussi une famille.

a) 4 et 2

Les réponses varient, mais on cherche que l'équation est de la forme $y=a(x-4)(x-2)$ et a peut être n'importe quelle valeur.

b) 0 et -5

Les réponses varient, mais on cherche que l'équation est de la forme $y=ax(x+5)$ et a peut être n'importe quelle valeur.

c) 6 est la seule abscisse à l'origine

Les réponses varient, mais on cherche que l'équation est de la forme $y=a(x-6)^2$ et a peut être n'importe quelle valeur.

Exemple

Détermine l'équation de fonction du second degré dont les zéros et un autre point du graphique sont donnés. Écris chaque équation sous la forme générale.

a) 2 et -3; son graphique passe par le point (0,3)

$$y = a(x-2)(x+3)$$

$$3 = a(0-2)(0+3)$$

$$3 = a(-2)(3)$$

$$3 = -6a$$

$$\frac{-1}{2} = a$$

$$\text{Donc, } y = \frac{-1}{2}(x-2)(x+3)$$

$$y = \frac{-1}{2}(x^2 + 3x - 2x - 6)$$

$$y = \frac{-1}{2}(x^2 + x - 6)$$

$$y = \frac{-1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$$

b) zéro double en $x = -2$; son graphique passe par le point (3,10)

$$y = a(x+2)(x+2)$$

$$10 = a(3+2)^2$$

$$10 = a(25)$$

$$\frac{2}{5} = a$$

$$\text{Donc, } y = \frac{2}{5}(x+2)^2$$

$$y = \frac{2}{5}(x^2 + 2x + 2x + 4)$$

$$y = \frac{2}{5}(x^2 + 4x + 4)$$

$$y = \frac{2}{5}x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{8}{5}$$