Nom : CORRIGÉ Date :

# Évaluation sommative – Unité 1

## Les fonctions

Attentes visées :

- Démontrer une compréhension de la nature des racines d'une équation du second degré.
- Manipuler des polynômes et des expressions rationnelles
- Démontrer une compréhension des caractéristiques des transformations des représentations graphiques et des réciproques de fonctions algébriques simples.

---

1. Indique le domaine et l'image de chaque relation. Ces relations sont-elles toutes des fonctions? Explique ta réponse.

a.

$\{-5 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{R}\}$
$\{-5 \leq y \leq 5, y \in \mathbb{R}\}$

*Cette relation n'est pas une fonction puisque c'est un cercle et ne passe pas le test de la droite verticale.*

b. $y = 0{,}5x^2 - 4$

$\{x \in \mathbb{R}\}$
$\{y \geq -4, y \in \mathbb{R}\}$

*Cette relation est une fonction puisque c'est une parabole et répond aux exigences du test de la droite verticale.*

2. Deux fonctions peuvent-elles avoir le même domaine et image? Explique.

*Oui, deux fonctions peuvent avoir le même domaine et image. Par exemple, toutes les fonctions affines ont le même domaine et image. (les réponses varient – il y a plusieurs autres possibilités)*

3. Michelle a écrit la fonction définie par $\boldsymbol{y = 3t^2 + 5t - 5}$ comme la fonction $\boldsymbol{f(x) = 3t^2 + 5t - 5}$. A-t-elle raison? Explique pourquoi.

   *Elle n'a pas raison puisque $f(x)$ définit la relation f comme fonction de x, où la variable indépendante est x. Par contre, la relation a une variable de t comme variable indépendante.*
   *Elle aurait dû écrire $f(t) = 3t^2 + 5t - 5$.*

4. Détermine la valeur maximale ou minimale de la fonction définie par l'équation $\boldsymbol{f(x) = 6x^2 - 36x - 5}$ et la valeur de x qui y est associée.

   Compléter le carré

$$\begin{aligned} f(x) &= 6(x^2 - 6x + 9 - 9) - 5 \\ &= 6(x-3)^2 + 54 - 5 \\ &= 6(x-3)^2 - 59 \end{aligned}$$

   *La valeur minimale de la fonction est -59 lorsque x est 3.*

   ou par la factorisation partielle

$$\begin{aligned} Soit\ g(x) &= 6x^2 - 36x \\ &= 6x(x-6) \end{aligned}$$

$$Donc, les\ abscisses\ à\ l'origines\ sont\ 0\ et\ 6.$$

   L'axe de symétrie est donc à $x = 3$.

$$\begin{aligned} f(3) &= 6(3)^2 - 36(3) - 5 \\ &= -59 \end{aligned}$$

   *La valeur minimale de la fonction est -59 lorsque x est 3.*

5. Simplifie chaque expression.
   a. $\boldsymbol{2\sqrt{28} + \sqrt{54} + \sqrt{150} + 5\sqrt{7}}$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{4 \cdot 7} + \sqrt{9 \cdot 6} + \sqrt{25 \cdot 6} + 5\sqrt{7} \\ &= 4\sqrt{7} + 3\sqrt{6} + 5\sqrt{6} + 5\sqrt{7} \\ &= 9\sqrt{7} + 8\sqrt{6} \end{aligned}$$

   b. $\boldsymbol{(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})}$

$$\begin{aligned} &= x^2 - \sqrt{5}x + \sqrt{5}x - \sqrt{25} \\ &= x^2 - 5 \end{aligned}$$

6. Résous les équations ci-après à l'aide de la méthode la plus appropriée. Représente tes solutions sous la forme exacte et la plus simple.
   a. $\boldsymbol{2x^2 - 7x = 4}$

$$2x^2 - 7x - 4 = 0$$
$$(2x^2 - 8x)(+x - 4) = 0$$
$$2x(x-4) + 1(x-4) = 0$$
$$(2x+1)(x-4) = 0$$
$$x = 4 \; ou \; x = -\frac{1}{2}$$

   b. $\boldsymbol{x^2 + 3x - 5 = 0}$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

7. Une maison d'édition s'attend à vendre par Internet 5 000 exemplaires d'un livre nouvellement publié si elle en fixe le prix à 40 $ l'unité. Selon ses prévisions, chaque réduction du prix de 2 $ lui permettrait d'en vendre 500 exemplaires de plus.
   a. À quel prix la maison d'édition devrait-elle vendre les livres afin de maximiser les recettes?

*Soit x, le nombre de réduction du prix de 2$ et R, les recettes en dollars.*

$$R(x) = (5000 + 500x)(40 - 2x)$$
$$= 200000 - 10000x + 20000x - 1000x^2$$
$$= -1000x^2 + 10000x + 200000$$
$$= -1000(x^2 - 10x + 25 - 25) + 200000$$
$$= -1000(x-5)^2 + 25000 + 200000$$
$$= -1000(x-5)^2 + 225000$$

*La maison d'édition devrait vendre les livres à 30$ l'unité (5 réductions de 2$ du prix initial de 40$) afin de maximiser les recettes à 225000$.*

   b. Donne le domaine et l'image de la fonction représentant les recettes.

$\{0 \leq x \leq 20, x \in \mathbb{R}\}$
$\{200000 \leq R \leq 225000, R \in \mathbb{R}\}$

8. Explique comment le discriminant peut nous donner le nombre de racines d'une équation du second degré.

   *Le discriminant étant* $b^2 - 4ac$, *une partie de la formule quadratique, nous pouvons utiliser la valeur afin de connaître si le nombre de racines est de 0, 1 ou 2.*

   *Si la valeur du discriminant est nulle, il y aura juste une racine réelle.*
   *Si la valeur du discriminant est négative, il n'y aura pas de racines réelles.*
   *Si la valeur du discriminant est positive, il y aura deux racines réelles.*

9. Détermine la ou les valeurs possibles de $\boldsymbol{k}$ telles que la courbe représentative de $\boldsymbol{f(x) = x^2 + kx + 4}$ :
   a. coupe l'axe des x une seule fois;

      *Afin de couper l'axe des x une seule fois, f(x) doit être un trinôme carré parfait.*
      *Donc, la valeur de k est 4.*

   b. coupe l'axe des x deux fois;

      *Afin de couper l'axe des x deux fois, le discriminant doit être positif.*
      *Donc,* $k^2 - 4(1)(4)$ *ou* $k^2 - 16$.
      *Alors, k doit être plus grand que 4 ou plus petit que -4.*

10. Détermine l'équation sous la forme générale de la fonction représentée ci-dessous.

$$f(x) = a(x+3)(x-4)$$
$$-4 = a(1+3)(1-4)$$
$$-4 = a(4)(-3)$$
$$\frac{-4}{-12} = a$$
$$\frac{1}{3} = a$$

$$f(x) = \frac{1}{3}(x+3)(x-4)$$

11. On compte peindre une murale rectangulaire sur le mur du gymnase. Elle aura une longueur de 15 m et une largeur de 12 m. Cette peinture murale sera bordée sur chaque côté par une bande de largeur uniforme. Quelle devra être la largeur de la bande qui l'entoure si l'aire totale (la murale et la bande) doit couvrir une surface de 200 $\boldsymbol{m^2}$?

*Soit x, la largeur de la bande et A, l'aire totale.*

$$\begin{aligned}
A(x) &= (15 + 2x)(12 + 2x) \\
200 &= 180 + 30x + 24x + 4x^2 \\
0 &= 4x^2 + 54x - 20 \\
0 &= 2x^2 + 27x - 10 \\
x &= \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 4(2)(-10)}}{2(2)} \\
&= \frac{-27 \pm \sqrt{809}}{4} \\
&= 0{,}36 \; ou - 13{,}86
\end{aligned}$$

*La largeur de la bande devrait être de 0,36 mètres.*