Nom : **CORRIGÉ** Date : ____________________

TEST – Unité 3

Évaluation sommative

Modélisation à l'aide de fonctions algébriques

Attentes visées

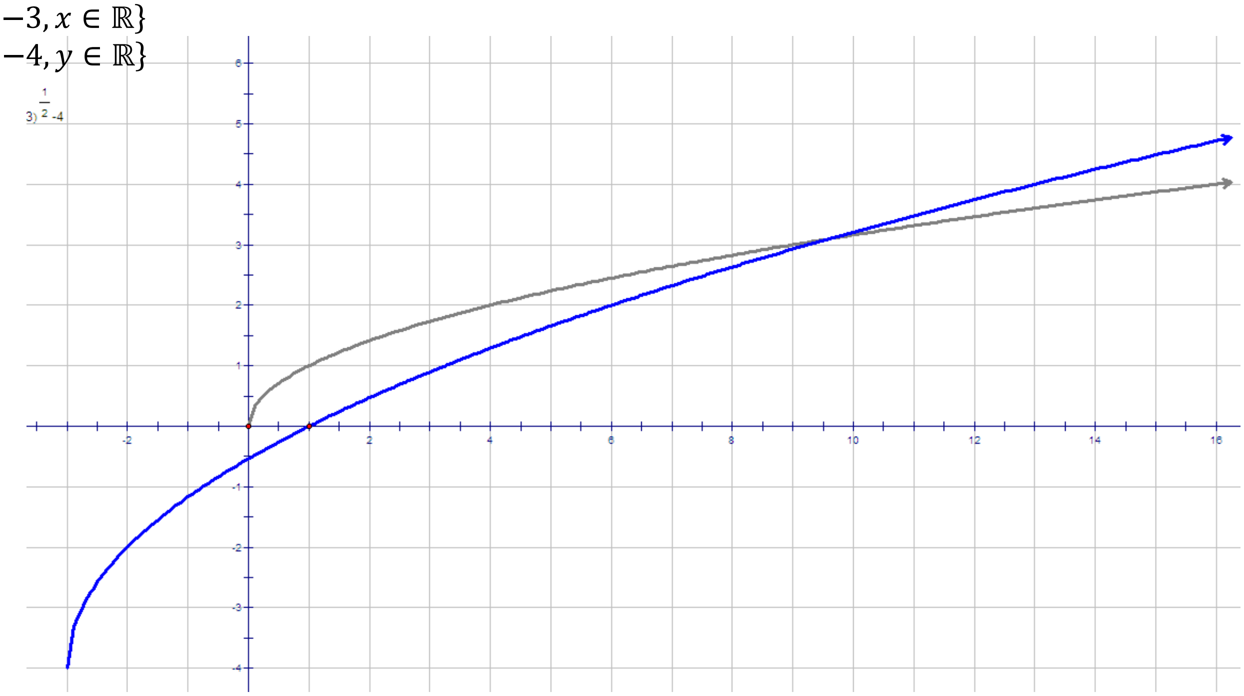
- Démontrer une compréhension des caractéristiques des transformations des représentations graphiques et des réciproques de fonctions algébriques simples..

RÉPONDS À LA QUESTION 1 SUR DU PAPIER QUADRILLÉ À PART.

1. Pour chaque fonction $g(x)$:
   a. $g(x) = 2\sqrt{x+3} - 4$
   b. $g(x) = -3(2x+2)^2 - 1$
   c. $g(x) = \frac{1}{x-4} + 6$

   i. Détermine la fonction de base parmi $f(x) = x, f(x) = x^2, f(x) = \sqrt{x}\ et\ f(x) = \frac{1}{x}$.
   ii. Décris la transformation sous la forme $y = af(k(x-c)) + d$ et à l'aide de mots.
   iii. Trace le graphique de $f(x)$ et de $g(x)$.
   iv. Indique le domaine et l'image de chaque fonction $g(x)$.

a. $f(x) = \sqrt{x}$
$g(x) = 2f(x+3) - 4$
Un agrandissement vertical de 2, une translation horizontale de 3 vers la gauche et une translation verticale de 4 vers le bas.
$\{x \geq -3, x \in \mathbb{R}\}$
$\{y \geq -4, y \in \mathbb{R}\}$



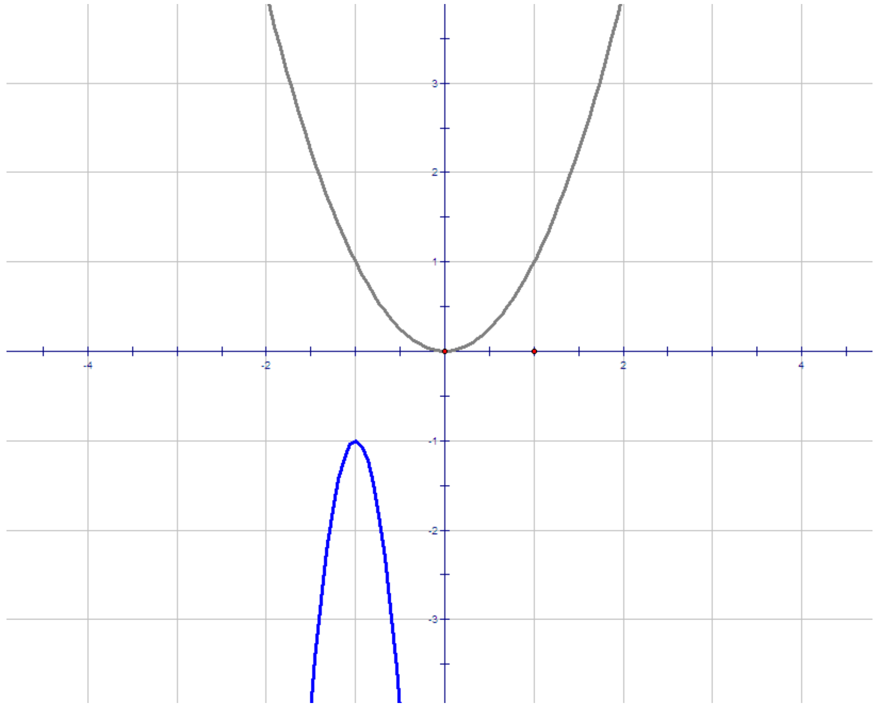
b. $f(x) = x^2$

$g(x) = -3f(2(x+1)) - 1$

Une réflexion verticale, un agrandissement vertical de 3, un rétrécissement horizontal de ½ , une translation horizontale de 1 vers la gauche et une translation verticale de 1 vers le bas.

$\{x \in \mathbb{R}\}$

$\{y \leq -1, y \in \mathbb{R}\}$



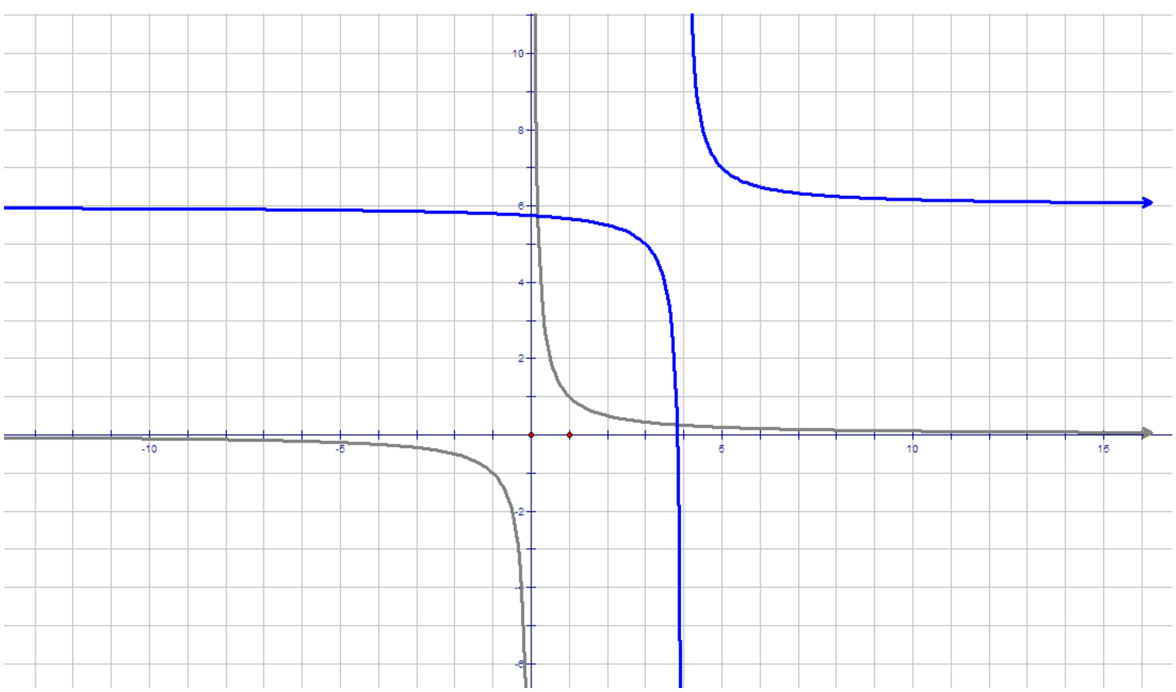
c. $f(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = f(x-4) + 6$

Une translation horizontale de 4 vers la droite et une translation verticale de 6 vers le haut.

$\{x \neq 4, x \in \mathbb{R}\}$

$\{y \neq 6, y \in \mathbb{R}\}$

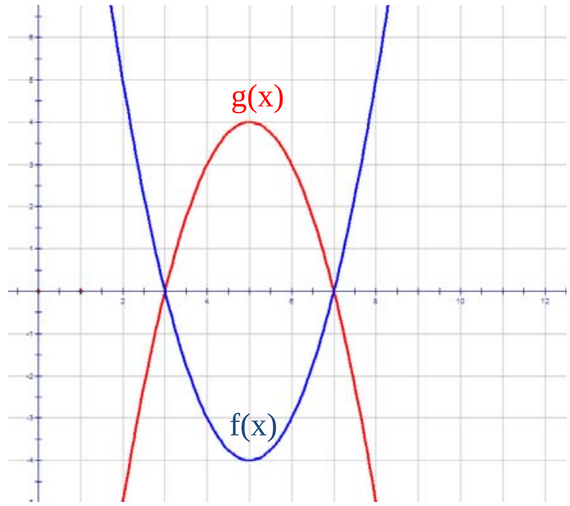


2. **Détermine l'équation de la fonction $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 7x + 3}$ après une réflexion par rapport à l'axe des x, donnant $\boldsymbol{g(x)}$.**

$$-f(x) = -2x^2 + 7x - 3$$

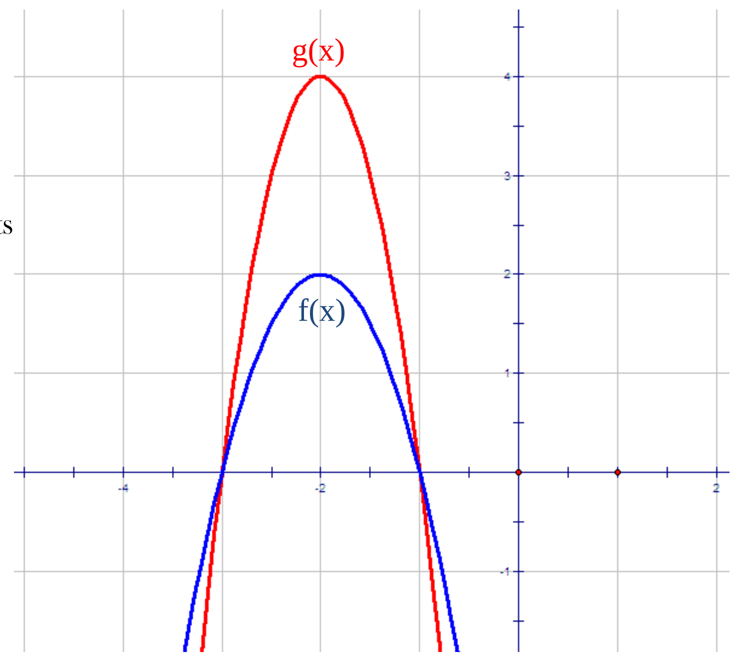
3. **Détermine si $\boldsymbol{g(x)}$ est une réflexion de $\boldsymbol{f(x)}$. Si c'est le cas, décris cette réflexion.**

C'est une réflexion verticale ou une réflexion par rapport à l'axe des x. On peut aussi dire que $g(x) = -f(x)$.



4. **Explique pourquoi le graphique de $\boldsymbol{g(x) = af(x)}$, où $\boldsymbol{a > 0}$, est un agrandissement vertical et non horizontal du graphique de $\boldsymbol{f(x)}$.**

Le graphique de g(x) est un agrandissement vertical et non horizontale puisque les valeurs de y ont changé et non les valeurs de x. Nous pouvons constater ceci en examinant les points invariants de f et g et nous voyons que ces points sont les abscisses à l'origine, dont les points où y est nul.



5. **Est-ce qu'on peut appliquer les translations horizontales et verticales avant les agrandissements, les rétrécissements et les réflexions? Pourquoi?**

Non, on ne peut pas appliquer les translations avant les agrandissements, les rétrécissements et les réflexions puisqu'il faut respecter l'ordre des opérations et les translations représentent des additions et des soustractions, tandis que les agrandissements, les rétrécissements et les réflexions représentent des multiplications et des divisions.

6. **Qu'est-ce qu'une réciproque? Appuie ta réponse par un exemple algébrique et graphique.**

Une réciproque représente un processus inverse où on inverse les abscisses et les ordonnées d'une fonction. Graphiquement, c'est une réflexion par rapport à la droite y = x.
Les réponses varient pour appuyer cette définition.

7. **Pour chaque fonction $\boldsymbol{f(x)}$:**
   a. $\boldsymbol{f(x) = 11x - 3}$
   b. $\boldsymbol{f(x) = (x+8)^2 + 19}$

   i. **Détermine $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$.**
   ii. **Détermine si $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ est une fonction et donne le domaine et l'image.**

a. Soit $y = 11x - 3$

$$\begin{aligned} x &= 11y - 3 \\ x + 3 &= 11y \\ \frac{x+3}{11} &= y \\ \frac{1}{11}x + \frac{3}{11} &= y \end{aligned}$$

Donc, $f^{-1}(x) = \frac{1}{11}x + \frac{3}{11}$.

$f^{-1}(x)$ est une fonction affine et son domaine et image sont $\{x \in \mathbb{R}\}$ et $\{y \in \mathbb{R}\}$.

b. Soit $y = (x+8)^2 + 19$

$$\begin{aligned} x &= (y+8)^2 + 19 \\ x - 19 &= (y+8)^2 \\ \pm\sqrt{x-19} &= y + 8 \\ 8 \pm \sqrt{x-19} &= y \end{aligned}$$

Donc, $f^{-1}(x) = 8 \pm \sqrt{x-19}$.

$f^{-1}(x)$ n'est pas une fonction, à moins qu'on applique juste la branche positive ou juste la branche négative. Son domaine et image sont $\{x \geq 19, x \in \mathbb{R}\}$ et $\{y \in \mathbb{R}\}$.

8. **On lance une pierre vers le haut à partir d'une falaise. Sa hauteur h, en mètres, après t secondes est donnée par $\boldsymbol{h(t) = 100 + 10t - 5t^2}$.**
   a. **Donne le domaine et l'image de cette fonction dans ce contexte.**

$$\begin{aligned} h(t) &= -5(t^2 - 2t + 1 - 1) + 100 \\ &= -5(t-1)^2 + 105 \end{aligned}$$

$\{0 \leq t \leq 5{,}58, t \in \mathbb{R}\}$
$\{0 \leq h \leq 105, h \in \mathbb{R}\}$

b. **Détermine la réciproque, explique ce qu'elle représente et donne le domaine et l'image.**

$h(t) = -5(t-1)^2 + 105$

Soit $y = -5(x-1)^2 + 105$

$$x = -5(y-1)^2 + 105$$
$$x - 105 = -5(y-1)^2$$
$$\frac{x-105}{-5} = (y-1)^2$$
$$1 \pm \sqrt{\frac{x-105}{-5}} = y$$

Donc, $t(h) = 1 + \sqrt{\frac{h-105}{-5}}$

$\{0 \leq h \leq 105, h \in \mathbb{R}\}$
$\{0 \leq t \leq 5{,}58, t \in \mathbb{R}\}$

c. **Détermine à quel moment la pierre atteint une hauteur de 80 mètres.**

$$t(80) = 1 + \sqrt{\frac{80-105}{-5}}$$
$$= 3{,}23$$

Donc, après 3,23 secondes, la pierre atteint une hauteur de 80 mètres.