Nom : ______________________________ **Date :** ____________________

TEST

Unité 1 – Évaluation sommative

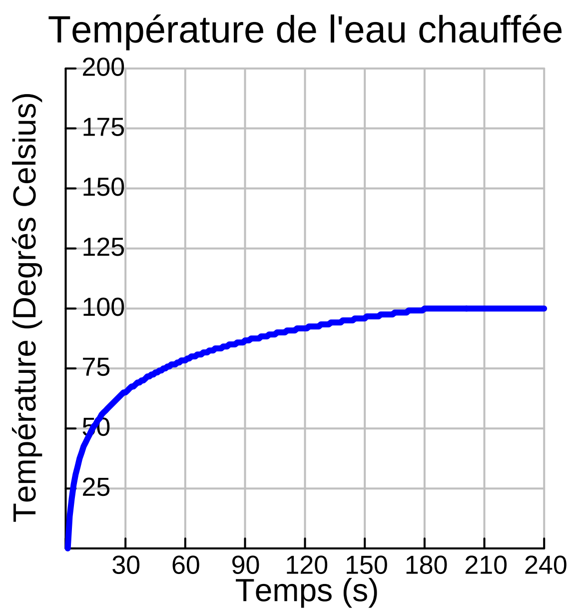
Les taux de variation

Attentes visées

- Démontrer une compréhension du taux de variation en établissant le lien entre le taux de variation moyen sur un intervalle et le taux de variation instantané en un point à l'aide de la sécante, de la tangente et de la notion de limite.
- Représenter graphiquement les dérivés des fonctions polynômes, sinusoïdales et exponentielles, et établir le lien entre les représentations algébrique, graphique et numérique d'une fonction et de sa dérivée.

---

1. Ce graphique montre la température de l'eau chauffée dans une bouilloire électrique.



a. Quel est le taux de variation moyen entre 1 minute et 3 minutes ?

$$\boldsymbol{m_{[60,180]} = \frac{100-78}{3-1}}$$
$$\boldsymbol{= 11°C/min}$$

b. Quel est le taux de variation instantanée à 3 minutes ?

$$\boldsymbol{m_{[30,180]}} = \frac{\mathbf{100 - 87,5}}{\mathbf{3 - 0,5}}$$
$$= \mathbf{5°C/min}$$

c. Interprète les résultats en (a) et en (b).

Le taux de variation moyen entre 1 et 3 minutes représente la vitesse moyenne du réchauffement de l'eau. Le taux de variation instantané à 3 minutes représente la vitesse instantanée du réchauffement de l'eau lorsque le temps est de 3 minutes.

Les deux valeurs sont positives, ce qui indique que la température de l'eau augmente à mesure que le temps s'écoule. De plus, la vitesse moyenne est plus grande que la vitesse instantanée qui indique que la température de l'eau augmente plus rapidement au début qu'à la fin.

d. Qu'est-il arrivé après 3 minutes ?

Après 3 minutes, la température de l'eau atteint son point d'ébullition et la température a cessé d'augmenter. Le taux de variation sera donc nul.

2. Soit la fonction ci-dessous. Indique les intervalles où la pente de la tangente est négative ? positive ? égale à zéro ?

Pente négative

$\{\mathbf{0} < x < 2{,}5, x \in \mathbb{R}\}$

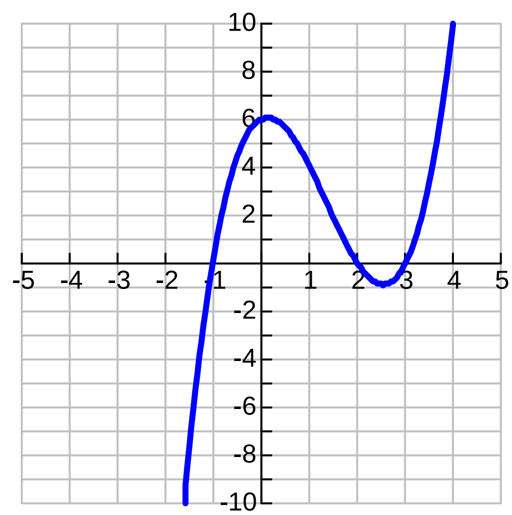
Pente positive

$\{\boldsymbol{x} < 0, x \in \mathbb{R}\}$

$\{\boldsymbol{x} > 2{,}5, x \in \mathbb{R}\}$

Pente nulle

$\boldsymbol{x = 0, x = 2,5}$



3. Calcule chaque limite.

a. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x-6}$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)}$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+3}{2}$$
$$= 3$$

b. $\lim_{x\to 2} x^2 - x - 6$

$$= \lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 6$$
$$= 4 - 2 - 6$$
$$= -4$$

c. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-x}-3}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-x}-3}{x}\left(\frac{\sqrt{9-x}+3}{\sqrt{9-x}+3}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{9-x-9}{x\left(\sqrt{9-x}+3\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\left(\sqrt{9-x}+3\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\left(\sqrt{9-x}+3\right)}$$
$$= \frac{-1}{6}$$

4. Détermine la valeur de chaque limite, si elle existe, pour la fonction définie par intervalle :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, x < 2 \\ -3x + 2, x \geq 2 \end{cases}$$

a. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

$$= -3(2) + 2$$
$$= -4$$

b. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

$$= 1 - 2^2$$
$$= -3$$

c. $\lim_{x\to 2} f(x)$

$\boldsymbol{n'existe\ pas}$

d. $\lim_{x\to 0} f(x)$

$$= 1 - 0^2$$
$$= 1$$

e. $\lim_{x\to 4} f(x)$

$$= -3(4) + 2$$
$$= -10$$

f. Est-ce que la fonction est continue ?

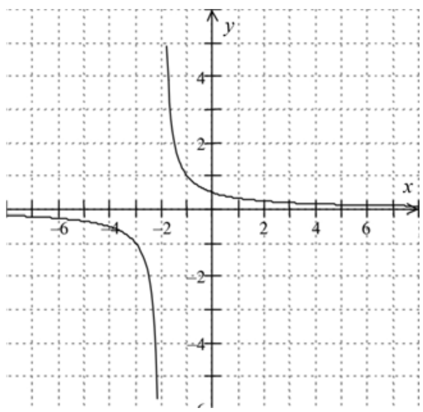
La fonction n'est pas continue en x=2.

5. Quel renseignement concernant le graphique de la fonction f(x) découle de l'expression $\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=6$?

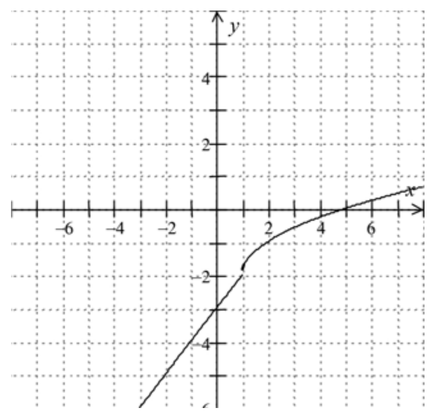
L'expression ci-dessus indique que la dérivée est 6 au point x = 4 du domaine de la fonction. En autre mots, la pente de la tangente au point de tangence x = 4 est 6.

6. Parmi les fonctions ci-dessous, laquelle est discontinue en $x = 2$?

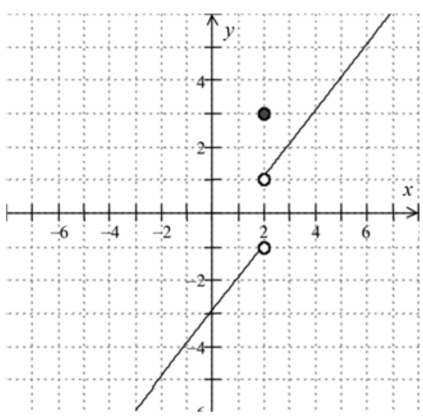
A



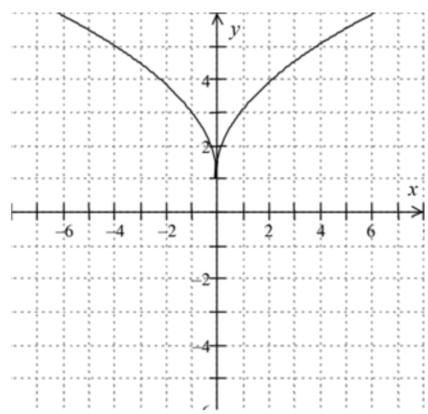
B



C



D



La fonction représentée par le graphique C est discontinue en x=2. C'est une discontinuité en un point.

7. Est-ce qu'une fonction continue est toujours dérivable ? Justifie.

Une fonction continue n'est pas toujours dérivable. Une fonction continue peut comporter des points où elle admet une tangente verticale ou là où elle connaît un changement abrupt : un point anguleux ou un point de rebroussement.

8. Trouve $\frac{dy}{dx}$ pour la fonction $y = 2x^2 - 5x$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2 - 5(x+h) - 2x^2 + 5x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 5x - 5h - 2x^2 + 5x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{4xh + 2h^2 - 5h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} 4x + 2h - 5\\ &= 4x - 5\end{aligned}$$

9. La relation entre l'énergie cinétique, en joules, d'un objet qui a une masse de 8 kg et la vitesse de l'objet, en mètres par seconde, est donnée par l'équation $E_c = 8v^2$.
   a. Détermine le taux de variation moyen de l'énergie entre les vitesses 2 m/s et 5 m/s.

$$\begin{aligned}TVM_{[2,5]} &= \frac{8(5)^2 - 8(2)^2}{5-2}\\ &= \frac{200 - 32}{3}\\ &= 56\,\frac{joules}{m/s}\end{aligned}$$

Le taux de variation moyen de l'énergie entre les vitesses 2m/s et 5m /s est de 56 joules par m/s.

   b. Détermine le taux de variation instantané de l'énergie quand v = 4 m/s.

$$\begin{aligned}TVI_{v=4} &= \lim_{h\to 0}\frac{8(4+h)^2 - 8(4)^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{128 + 16(4)h + 8h^2 - 128}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} 64 + 8h\\ &= 64\,\frac{joules}{m/s}\end{aligned}$$

Le taux de variation moyen de l'énergie entre les vitesses 2m/s et 5m /s est de 56 joules par m/s.