Nom : CORRIGÉ Date : ____________________

TEST

Unité 2 – Évaluation sommative

Les dérivées

Attentes visées

- Représenter graphiquement les dérivés des fonctions polynômes, sinusoïdales et exponentielles, et établir le lien entre les représentations algébrique, graphique et numérique d'une fonction et de sa dérivée.
- Vérifier algébriquement et graphiquement les différentes règles de dérivation d'une fonction et déterminer les dérivées de fonctions polynômes, rationnelles, exponentielles, sinusoïdales et radicales et d'une combinaison simple de fonctions, et résoudre des problèmes portant sur des applications tirées de la vie courante.

1. Détermine les dérivées des fonctions suivantes.

a. $y = \sqrt{3x^2 + 4}$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}}(6x)}$$
$$\boldsymbol{= \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 4}}}$$

b. $y = (3 + t)(4t - 7)$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 1(4t - 7) + (3 + t)(4)}$$
$$\boldsymbol{= 8t + 5}$$

c. $g(x) = (-2x^3 + 3)^4$

$$\boldsymbol{g'(x) = 4(-2x^3 + 3)^3(-6x^2)}$$
$$\boldsymbol{= -24x^2(-2x^3 + 3)^3}$$

d. $y = \left(\frac{3x+5}{x-1}\right)^4$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 4\left(\frac{3x + 5}{x - 1}\right)^3\left(\frac{3(x - 1) - (3x + 5)(1)}{(x - 1)^2}\right)}$$
$$\boldsymbol{= \frac{-32(3x + 5)^3}{(x - 1)^5}}$$

2. La dérivée de $h(x) = f(x)g(x)$ est $h'(x) = (10x)(21 - 3x) + (5x^2 + 7)(-3)$. Que sont les fonctions $f(x)$ et $g(x)$?

$\boldsymbol{f(x) = 5x^2 + 7}$
$\boldsymbol{g(x) = 21 - 3x}$

3. La fonction $p(t) = 200 + 20t - t^2$ représente la population d'une colonie bactérienne, dans laquelle *t* représente le temps, en heures, et *p*, le nombre de bactéries, en milliers. À quel moment la population cesse-t-elle de croître ? Quelle est la population alors ?

$$p'(t) = 20 - 2t$$
$$0 = 20 - 2t$$
$$t = 10\ heures$$

La population cesse de croître après 10 heures.

$$p(10) = 200 + 20(10) - (10)^2$$
$$= 300\ milliers$$

La population est donc 300 milliers après 10 heures.

4. Détermine l'équation de la tangente à la courbe de $y = \frac{-4x}{(x+3)^2}$ au point où $x = 2$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4(x+3)^2 - (-4x)\big(2(x+3)(1)\big)}{(x+3)^4}$$
$$\frac{dy}{dx}_{x=2} = \frac{-4(25) - (-8)(10)}{625}$$
$$= -\frac{4}{125}$$

$$y = mx + b$$
$$\frac{-8}{25} = \frac{-4}{125}(2) + b$$
$$\frac{-32}{125} = b$$

Alors, $y = \frac{-4}{125}x - \frac{32}{125}$.

5. Détermine les coordonnées des points du graphique de $f(x) = x^3 + 2x^2$ où la pente de la tangente est 36.

$$f'(x) = 3x^2 + 4x$$
$$36 = 3x^2 + 4x$$
$$0 = 3x^2 + 4x - 36$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(3)(-36)}}{6}$$
$$= \frac{-4 \pm 21{,}16}{6}$$
$$= 2{,}86 \; ou - 4{,}19$$

Les coordonnées sont :

$f(2{,}86) = 39{,}75$
$f(-4{,}19) = -38{,}45$

6. Qu'est-ce que Cassandra devrait répondre à Kristen qui affirme : « Je n'ai pas besoin d'apprendre la règle de dérivation du produit de fonctions puisque je peux toujours développer les produits et trouver ensuite la dérivée. »

La règle de dérivation du produit de deux fonctions est la méthode la plus efficace pour dériver le produit de deux fonctions. Cette règle est utile pour dériver des fonctions qu'il serait long de développer et de simplifier.
Par exemple, $y = (x + 5)^{15}(x^4 - 7x)^{20}$.

7. Pendant un spectacle de feux d'artifice, on lance une fusée en forme d'étoile avec une vitesse initiale de 34,5 m/s, à partir d'une plate-forme de 3,2 m de haut. La fonction $h(t) = -4{,}9t^2 + 34{,}5t + 3{,}2$ représente la hauteur de la fusée, en mètres, après t secondes.
   a. Détermine la vitesse et l'accélération de la fusée à 3 secondes.

   $v(t) = -9{,}8t + 34{,}5$
   $v(3) = 5{,}1 \; m/s$

   $a(t) = -9{,}8$
   $a(3) = -9{,}8 \; m/s^2$

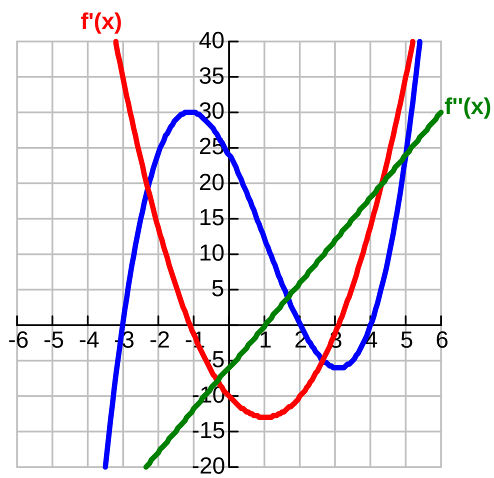
b. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la fusée ?

$$\begin{aligned} v(t) &= -9{,}8t + 34{,}5 \\ 0 &= -9{,}8t + 34{,}5 \\ 9{,}8t &= 34{,}5 \\ t &= \frac{34{,}5}{9{,}8} \\ t &= 3{,}52 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(3{,}52) &= -4{,}9(3{,}52)^2 + 34{,}5(3{,}52) + 3{,}2 \\ &= 63{,}92 \end{aligned}$$

La hauteur maximale atteinte par la fusée est de 63,92m.

8. Sers-toi du graphique de la fonction ci-dessous pour esquisser le graphique de la dérivée première et la dérivée seconde.



Les fonctions reliées à l'économie		
Demande : $p(x)$	Revenu : $xp(x)$	Profit : Revenu – Coût

9. Un magasin de peinture vend 270 contenants de peinture par mois, au prix de 32$ chacun. Un sondage effectué auprès des clients indique que pour chaque réduction de prix de 1,20$, les ventes augmenteront de 6 contenants de plus.
   a. Détermine la fonction exprimant la demande.

   Soit x, le nombre de ventes, n, le nombre d'augmentation de 1,20$ et p, le prix en dollars.

   $x = 270 + 6n$
   $p = 32 - 1{,}20n$

Alors,

$$p(x) = 32 - 1{,}2\left(\frac{x - 270}{6}\right)$$
$$= 86 - 0{,}2x$$

La fonction exprimant la demande est donc $p(x) = 86 - 0{,}2x$.

b. Détermine la fonction exprimant le revenu.

Soit R, le revenu en dollars.

$$R(x) = x(86 - 0{,}2x)$$
$$= 86x - 0{,}2x^2$$

La fonction exprimant le revenu est donc $R(x) = 86x - 0{,}2x^2$.

c. Détermine le revenu marginal.

$$R'(x) = 86 - 0{,}4x$$

d. Résous $R'(x) = 0$. Interprète la valeur dans ce contexte.

$$0 = 86 - 0{,}4x$$
$$x = 215$$

Cette valeur représente les ventes qui maximiseront les revenus. Donc, le magasin devrait vendre 215 contenants de peinture afin de maximiser les revenus.

e. Quel est le prix qui correspond à la valeur trouvée en d) ? En quoi cette information peut-elle être utile au magasin de peinture ?

$$p(215) = 86 - 0{,}2(215)$$
$$= 43$$

Cette information est utile au magasin pour décider le prix auquel vendre les peintures. S'ils vendent les peintures à 43$ au lieu de 32$, ils maximiseront leurs revenus, même en diminuant les ventes.