Nom : CORRIGÉ Date : ____________________

TEST

Unité 3 – Évaluation sommative

La représentation graphique

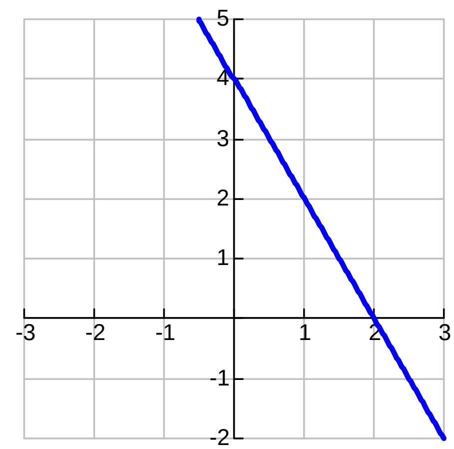
Attentes visées

- Établir algébriquement et graphiquement, des liens entre les caractéristiques principales d'une fonction et des dérivées première et seconde, et, à l'aide de ces liens, esquisser le graphique de la fonction.

---

1. Sur l'intervalle $0 \leq x \leq 8$, la fonction $f(x) = x^2 - 2x - 8$ a un minimum absolu en :
   A $x = 0$
   B $x = -2$
   C $x = 1$
   D $x = 8$

2. Ce graphique représente $f'(x)$. Lequel des énoncés ne s'applique pas au graphique de $f(x)$?
   A Il possède un point extremum.
   B Il est concave vers le bas pour toutes les valeurs de x.
   C Il est croissant pour $x < 2$.
   D Il est décroissante pour toutes les valeurs de x.



3. Pour une certaine fonction, $f'(2) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour $-1 < x < 2$. Lequel de ces énoncés est faux ?
   A (2, f(2)) est un point critique.
   B (2, f(2)) est un point extremum.
   C (2, f(2)) est un minimum local.
   D (2, f(2)) est un maximum local.

4. Pour la fonction $f(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$, lequel de ces énoncés est faux ?

   A Son graphique ne possède aucune abscisse à l'origine.

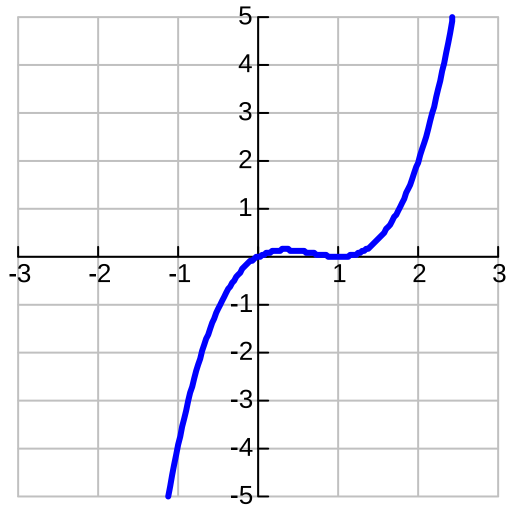
   B Son graphique est concave vers le bas pour toutes les valeurs de x du domaine.

   C $f'(x) > 0$ lorsque $x < 2$ et $f'(x) < 0$ lorsque $x > 2$.

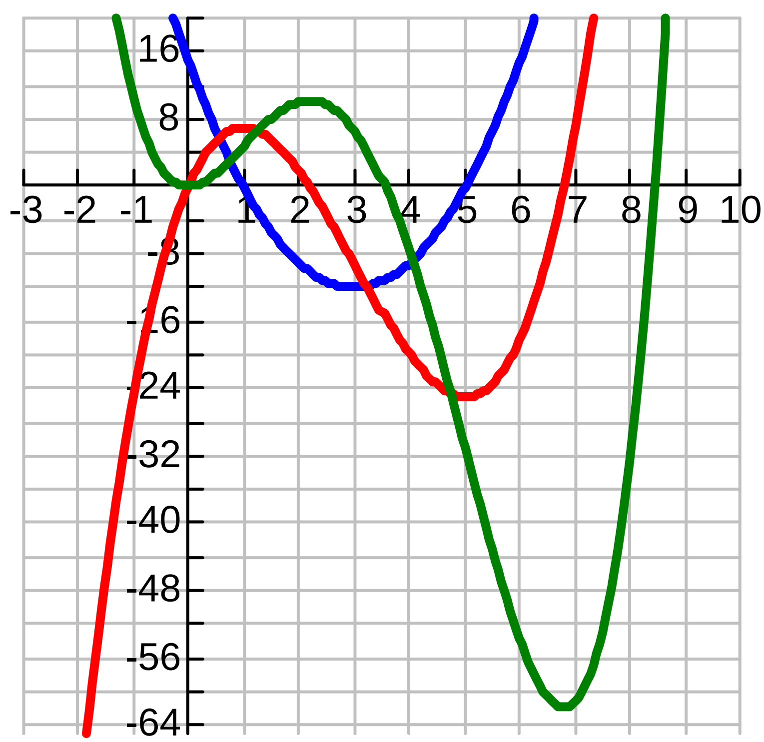
   D $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$

5. En étudiant le graphique de $f'(x)$ ci-contre, complète l'énoncé ci-dessous.

   Si $f'(x) = x(x-1)^2$, le graphique de $f(x)$ possède ____2____ points critique(s) et ____1____ extremum(s).



6. Soit le graphique de $f''(x)$, trace le graphique des dérivées première et seconde dans le même plan cartésien.



7. Analyse chaque fonction (SAMPOA) et esquisse son graphique. (sur du papier quadrillé à part).

a. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$

$\underline{Abscisses\ à\ l'origine}$

$0 = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$

$0 = (x+3)(x-2)(x-5)$

$\boldsymbol{x = -3, x = 2, x = 5}$

$\underline{Ordonnée\ à\ l'origine}$

$\boldsymbol{(0, 30)}$

$\underline{Asymptotes}$

Aucune puisque c'est une fonction polynôme

$\underline{Maximum\ ou\ minimum}$

$f'(x) = 3x^2 - 8x - 11$

$f'(-1) = 0$

$f'(x) = (x+1)(3x-11)$

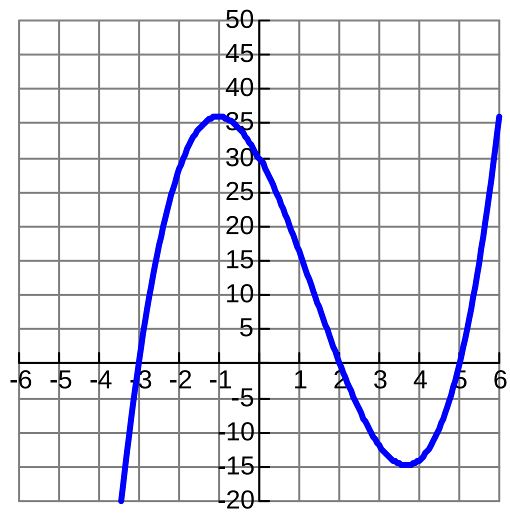
$Points\ critiques$

$\boldsymbol{x = -1\ et\ x = \frac{11}{3}}$

$\boldsymbol{y = 36\ et\ y = -14{,}8}$

$f''(-1) = -14, alors\ maximum$

$f''\left(\frac{11}{3}\right) = 14, alors\ minimum$



$\underline{Points\ d'inflexion}$

$f''(x) = 6x - 8$

$0 = 2(3x - 4)$

$\boldsymbol{x = \frac{4}{3}}$

$\boldsymbol{y = 10{,}59}$

	$x < \frac{4}{3}$	$x > \frac{4}{3}$
$3x - 4$	-	+
	Concave vers le bas	Concave vers le haut

b. $f(x) = \frac{5x}{x^2-1}$

Symétrie centrale

$f(-x) = -f(x)$

$\underline{Abscisses\ à\ l'origine}$

$0 = 5x$

$\boldsymbol{x = 0}$

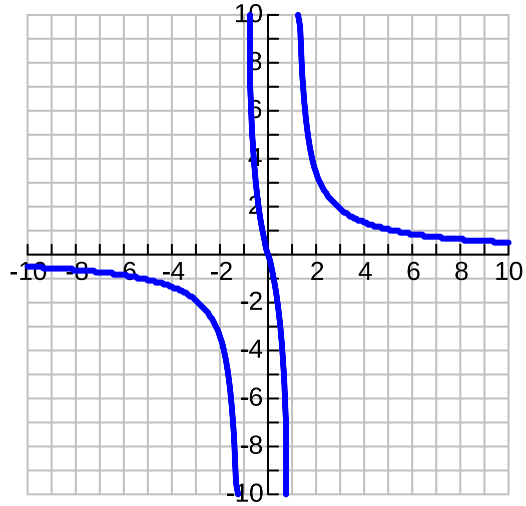
$\underline{Ordonnée\ à\ l'origine}$

$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$

$\underline{Asymptotes}$

$Asymptote\ verticale : \boldsymbol{x = -1}, \boldsymbol{x = 1}$

$Asymptote\ horizontale : \boldsymbol{y = 0}$



$\underline{Maximum\ ou\ minimum}$

$$f'(x) = \frac{5(x^2-1) - 5x(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-5x^2 - 5}{(x^2-1)^2}$$

$$0 = -5(x^2+1)$$

$Aucuns\ points\ critiques$

$\underline{Points\ d'inflexion}$

$$f''(x) = \frac{-10x(x^2-1)^2 - (-5x^2-5)\big(2(x^2-1)(2x)\big)}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{-10x(x^2-1) - (-5x^2-5)\big(2(2x)\big)}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{-10x^3 + 10x + 20x^3 + 20x}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{10x^3 + 30x}{(x^2-1)^3}$$

$$0 = 10x(x^2+3)$$

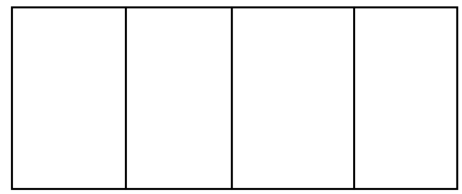
$\boldsymbol{x = 0}$

$\boldsymbol{y = 0}$

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	-	+	-	+
	Concave vers le bas	Concave vers le haut	Concave vers le bas	Concave vers le haut

8. Un fermier a 6000m de clôture pour délimiter un champ rectangulaire divisée en quatre parties congruentes. Détermine les dimensions de chaque partie qui maximisent l'aire.

Soit b, la longueur de la base du champ, h, la hauteur du champ et A, l'aire.



$$2b + 5h = 6000$$
$$b = \frac{6000 - 5h}{2}$$

$$A = bh$$
$$A(h) = \left(\frac{6000 - 5h}{2}\right)h$$
$$= 3000h - \frac{5}{2}h^2$$

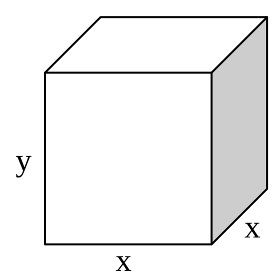
$$A'(h) = 3000 - 5h$$
$$h = 600$$

Vérification
$$A''(h) = -5, alors\ maximum$$

La hauteur du champ devrait être de 600m et la base de 1500m. Donc, chaque partie mesure 375m par 600m afin de maximiser l'aire.

9. Lisa fabrique une boîte à bijoux *(à base carrée)* pour sa mère dans son cours de technologie. Le dessus et le dessous de la boîte seront faits d'un bois dont le coût est de 0,002 \$/cm², tandis que les côtés seront faits d'un bois moins cher coûtant 0,001 \$/cm². Sachant que le volume de la boîte doit être de 4 800 cm³, détermine les dimensions de la boîte la moins dispendieuse à fabriquer.

Soit x, la largeur du coffre, y, la hauteur et C, le coût en dollars.



Équations
$$4800 = x^2y$$
$$y = \frac{4800}{x^2}$$

$$C = 0{,}002x^2 + 0{,}002x^2 + 0{,}001(4xy)$$
$$C(x) = 0{,}004x^2 + 0{,}004\left(x\left(\frac{4800}{x^2}\right)\right)$$
$$= 0{,}004x^2 + \frac{19{,}2}{x}$$

Calculs

$$C'(x) = 0{,}008x - \frac{19{,}2}{x^2}$$
$$0 = 0{,}008x^3 - 19{,}2$$
$$x = 13{,}39$$

Vérification

$$C''(x) = 0{,}008 + \frac{19{,}2}{x^3} = positif, alors\ minimum$$

Les dimensions de la boîte devraient être de 26,77cm de haut et 13,39cm par 13,39cm à la base afin de minimiser le coût de fabrication.