Chapitre 2

Introduction

Tu as découvert que le taux de variation instantané correspond à la pente de tangente à partir d'un point sur une courbe. Tu as aussi appris que tu pouvais trouver cette valeur à l'aide de la dérivée d'une fonction en utilisant la définition de la dérivée selon les principes de base. Cependant, les mathématiciens ont établi un ensemble de règles qui permettent de calculer les dérivées de façon plus efficace.

Problème du chapitre

À Ottawa, cinq amis ont mis sur pied une entreprise qui fabrique des jus frais à saveur typiquement canadienne. Ils ont nommé leur nouvelle entreprise Jus et Compagnie. La compagnie se spécialise dans la fabrication et la vente de jus de fruits frais, de boissons fouettées, de yogourt aux fruits congelés, et d'autres goûters aux fruits. La demande croissante pour ces produits santé a eu une influence positive sur les ventes et l'entreprise a grandi. Comment les jeunes entrepreneurs peuvent-ils utiliser les dérivées pour analyser leurs coûts, leurs profits, la productivité des employés, et ainsi augmenter leurs chances de réussite?

2.1 La dérivée d'une fonction polynôme

Explore

Quelles sont les règles de dérivation qui s'appliquent aux fonctions polynômes?

p. 73 A: 1abc, B : 1ab, 2, 3, C : 1 – 3, D : 1 – 3

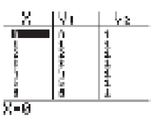
	Fonction initiale	Fonction dérivée
Règle des constantes	$y = c$	$\frac{dy}{dx} = 0$
Règle des puissances	$y = x^n$	$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$
Règle de dérivation de la somme de fonctions	$y = f(x) + g(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x)$
Règle de la différence	$y = f(x) - g(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x) - g'(x)$
Règle du multiple constant	$y = cf(x)$	$\frac{dy}{dx} = cf'(x)$

Partie A

1. a) i) $y = 2$: La pente de la fonction en tout point de son graphique est égale à 0.
   ii) $y = -3$: La pente de la fonction en tout point de son graphique est égale à 0.
   iii) $y = 0{,}5$: La pente de la fonction en tout point de son graphique est égale à 0.
   b) La pente de la fonction $y = c$ serait la même pour toute autre valeur de $c \in \mathbb{R}$. La pente en tout point d'une fonction constante est 0.
   c) La pente de la fonction $y = c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$ est $\frac{dy}{dx} = 0$.

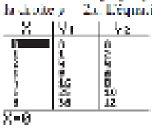
Partie B

1. a) Les échelles des graphiques varieront. Le graphique comporte la droite $y = x$ et la droite $y = 1$.
   b) L'équation qui correspond au graphique de la dérivée est $y = 1$.
   c)



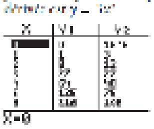
Les valeurs de y de la fonction dérivée, Y2, sont toutes égales à 1. Les valeurs du graphique de l'équation trouvée en b), $y = 1$, a les mêmes valeurs de y.

2. a) Les échelles des graphiques varieront. Le graphique comporte la parabole $y = x^2$ et la droite $y = 2x$. L'équation correspondant au graphique de la dérivée est $y = 2x$.



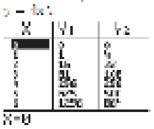
Les réponses varieront. Par exemple : Les valeurs de y du graphique de la dérivée, Y2, sont toutes égales à 2, que multiplie la valeur de x de la fonction $y = x^2$. Le graphique de l'équation trouvée, $y = 2x$, a les mêmes valeurs de y.

   b) Les échelles des graphiques varieront. Le graphique comporte la courbe de $y = x^3$ et la parabole de $y = 3x^2$. L'équation correspondant au graphique de la dérivée est $y = 3x^2$.



Les réponses varieront. Par exemple : Les valeurs de y du graphique de la fonction dérivée, Y2, sont toutes égales à 3, que multiplie le carré de la valeur de x de la fonction $y = x^3$. Le graphique de l'équation trouvée, $y = 3x^2$, a les mêmes valeurs de y.

   c) Les échelles des graphiques varieront. Le graphique comporte la courbe de $y = x^4$ et la courbe de $y = 4x^3$. L'équation correspondant au graphique de la dérivée est $y = 4x^3$.



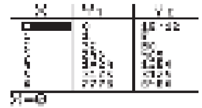
Les réponses varieront. Par exemple : Les valeurs de y du graphique de la fonction dérivée, Y2, sont toutes égales à 4, que multiplie le cube de la valeur de x de la fonction $y = x^4$. Le graphique de l'équation trouvée, $y = 4x^3$, a les mêmes valeurs de y.

3.

f(x)	f'(x)
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$

4. a) Oui, on observe une régularité des graphiques et des dérivées à l'étape 3. L'exposant dans la fonction initiale devient coefficient dans la fonction dérivée. L'exposant dans la fonction dérivée est égal à l'exposant dans la fonction initiale moins un. La dérivée d'une puissance, $f(x) = x^n$, est $f'(x) = nx^{n-1}$.

   b) La dérivée de $f(x) = x^5$ est $f'(x) = 5x^4$. Les échelles du graphique varieront. Le graphique comporte la courbe de $y = x^5$ et celle de $y = 5x^4$ qui ressemble à une parabole. L'équation correspondant au graphique de la dérivée est $y = 5x^4$.



Les réponses varieront. Par exemple : Les valeurs de y du graphique de la fonction dérivée, Y2, sont toutes égales à 5, que multiplie la puissance 4 de x de la fonction $y = x^5$. Le graphique de l'équation trouvée, $y = 5x^4$, a les mêmes valeurs de y.

Partie C

1. a) Les échelles des graphiques varieront.
   b) Les réponses varieront. Par exemple : Les graphiques de Y2, Y3 et Y4 sont des droites passant par l'origine, comme le graphique de Y1. Chacun des graphiques a subi un agrandissement vertical d'un facteur égal au coefficient de chaque fonction, lequel correspond à la pente de chacune des droites. Les droites deviennent plus abruptes à mesure que la pente augmente.
   c) Y1 $= x$, équation de la dérivée : $\frac{dy}{dx} = 1$

   Y2 $= 2x$, équation de la dérivée : $\frac{dy}{dx} = 2$

   Y3 $= 3x$, équation de la dérivée : $\frac{dy}{dx} = 3$

   Y4 $= 4x$, équation de la dérivée : $\frac{dy}{dx} = 4$
   d) Les réponses varieront. Par exemple : La dérivée de $y = cx$ pour toute constante $c \in \mathbb{R}$ est égale à la constante que multiplie la dérivée de la variable de la fonction.
2. a) Les échelles des graphiques varieront.
   b) Les réponses varieront. Par exemple : Les graphiques de Y2, Y3 et Y4 sont des paraboles de sommet (0, 0), comme le graphique de Y1. Chaque graphique a subi un agrandissement vertical d'un facteur égal au coefficient de chaque fonction.
   c) Y1 $= x^2$, équation de la dérivée : $\frac{dy}{dx} = 2x$

   Y2 $= 2x^2$, équation de la dérivée : $\frac{dy}{dx} = 4x$

   Y3 $= 3x^2$, équation de la dérivée : $\frac{dy}{dx} = 6x$

   Y4 $= 4x^2$, équation de la dérivée : $\frac{dy}{dx} = 8x$
   d) Les réponses varieront. Par exemple : La dérivée de $y = cx^2$ pour toute constante $c \in \mathbb{R}$ est égale à la constante que multiplie la dérivée de la variable de la fonction.
3. Les réponses varieront. Par exemple : Si $f(x) = cx^n$, alors $f'(x) = cnx^{n-1}$.

Partie D

1. a) i) $f'(x) = 4$; $g'(x) = 7$; $f'(x) + g'(x) = 4 + 7 = 11$
   ii) $h(x) = 4x + 7x = 11x$; $h'(x) = 11$
   b) Les réponses i) et ii) de la partie a) sont identiques. La dérivée prédite est la somme des dérivées de chaque terme de la fonction $h(x) = x + x^2$.
   c) Les réponses varieront.
   d) Les réponses varieront. Par exemple : Dans la table de valeurs de l'écran 6, la première colonne correspond aux valeurs de x pour chaque fonction. La deuxième colonne correspond aux valeurs de y de la dérivée de la fonction $y = x^2$. La troisième colonne correspond aux valeurs de y pour la somme des dérivées des fonctions $y = x$ et $y = x^2$.
   e) La relation est Y1 + Y2 = Y3.
2. Les réponses varieront. Par exemple :
   a) La somme des dérivées de chaque terme d'une fonction est égale à la dérivée de la fonction.
   b) Le trait foncé dans l'écran 5 correspond à la somme des deux fonctions qui sont représentées par une droite horizontale pleine et une droite pointillée. Le trait foncé dans l'écran 5 est identique à celui de l'écran 8.
   c) Les résultats vérifient les prédictions faites à l'étape 1 de la partie b).
3. La dérivée de la somme de deux fonctions est égale à la somme des dérivées des deux fonctions.
4. Les réponses varieront. Par exemple : Oui, il existe une formule semblable pour la dérivée de la différence de deux fonctions. La dérivée de la différence de deux fonctions est égale à la différence des dérivées des deux fonctions. Vous pouvez vérifier cette prédiction en traçant, dans la même fenêtre d'une calculatrice à affichage graphique, le graphique des dérivées de chacune des fonctions, celui de la différence des dérivées des deux fonctions ainsi que celui de la dérivée de la différence des deux fonctions. La règle de dérivation d'une différence est ainsi vérifiée.

Réponses aux questions de la rubrique Communication et compréhension (page 83)

C1 Une droite horizontale a une équation de la forme $y = c$, où c est une constante. Pour déterminer la dérivée de la fonction $y = c$, détermine la pente de la tangente à la droite. La tangente et le graphique de $y = c$ coïncident. La pente d'une droite horizontale est zéro. Donc, la dérivée d'une constante est zéro.

C2 Si une fonction polynôme est formée d'une somme ou d'une différence de termes, on peut utiliser les règles de dérivation d'une somme ou d'une différence de fonctions. On dérive chaque terme séparément puis on additionne ou on soustrait, selon le cas.

C3 En additionnant ou soustrayant trois fonctions polynômes ou plus, puis en simplifiant, on peut appliquer les règles de dérivation de la somme et de la différence. Par exemple : $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 2x^3 + 2x^2$, $h(x) = x^2$ et $k(x) = f(x) + g(x) - h(x)$.

Détermine $k'(x)$.

$k(x) = f(x) + g(x) - h(x)$
$= (x^2 + 3) + (2x^3 + 2x^2) - (x^2)$
$= 2x^3 + 2x^2 + 3$

$k'(x) = 6x^2 + 4x$

$k'(x) = f'(x) + g'(x) - h'(x)$
$= 2x + 6x^2 + 4x - 2x$
$= 6x^2 + 4x$

De plus :

$k(x) = f(x) + g(x) - h(x)$
$k(x) = (x^2 + 3) + (2x^3 + 2x^2) - (x^2)$
$k'(x) = (2x + 0) + (6x^2 + 4x) - (2x)$
$k'(x) = 6x^2 + 4x$

On obtient le même résultat avec les trois méthodes.

C4 Pour faire la preuve d'une règle de dérivation, il faut démontrer que cette règle est vraie pour toutes les fonctions. La démonstration repose sur les principes de base. Si on montre que la règle fonctionne pour certaines fonctions, elle s'appliquera pour certaines fonctions, mais pourrait ne pas s'appliquer dans tous les cas. On montre comment les règles s'appliquent en dérivant des fonctions à l'aide de ces règles.

Les preuves des règles de dérivation
p. 76 – p. 77

Exemple
Détermine la dérivée pour chaque fonction. Exprime tes réponses à l'aide d'exposants positifs.

a) $y=\sqrt[3]{x}$

$y=x^{\frac{1}{3}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

b) $y=\frac{1}{x}$

$y=x^{-1}$

$\frac{dy}{dx}=-x^{-2}$

$=-\frac{1}{x^2}$

c) $y=-\frac{1}{x^5}$

$y=-1x^{-5}$

$\frac{dy}{dx}=5x^{-6}$

$=\frac{5}{x^6}$

d) $y=5x^6-4x^3+6$

$y'=30x^5-12x^2$

e) $f(x)=-3x^5+8\sqrt{x}-9,3$

$f(x)=-3x^5+8x^{\frac{1}{2}}-9,3$

$f'(x)=-15x^4+4x^{-\frac{1}{2}}-0$

$=-15x^4+\frac{4}{\sqrt{x}}$

f) $g(x)=(2x-3)(x+1)$

$g(x)=2x^2-x-3$

$g'(x)=4x-1$

g) $h(x) = \frac{-8x^6 + 8x^2}{4x^5}$

$$= \frac{-8x^6}{4x^5} + \frac{8x^2}{4x^5}$$

$$= -2x + 2x^{-3}$$

$h'(x) = -2 - 6x^{-4}$

$$= -2 - \frac{6}{x^4}$$