La règle de la dérivation du produit de fonctions

La dérivation du produit de fonctions

Si $P(x)=f(x)g(x)$, où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions dérivables, alors $P'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

En notation Leibniz,

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x)+f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right].$$

Preuve de la règle

Utilisons la définition selon les principes de base.

$$\begin{aligned}
P'(x) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{P(x+h)-P(x)}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\right)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}(f(x+h))\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}(g(x))\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

$$=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Exemple

Utilise la règle de dérivation du produit de fonctions pour trouver la dérivée de chaque fonction.

a) $p(x)=(3x-5)(x^2+1)$

$$p'(x)=3(x^2+1)+(3x-5)(2x)$$
$$=3x^2+3+6x^2-10x$$
$$=9x^2-10x+3$$

b) $p(x)=(2x+3)(1-x)$

$$p'(x)=2(1-x)+(2x+3)(-1)$$
$$=2-2x-2x-3$$
$$=-4x-1$$

$$\frac{d}{dx}((3\cdot x-5)\cdot(x^2+1))$$
$$9\cdot x^2-10\cdot x+3$$

$$\frac{d}{dx}((2\cdot x+3)\cdot(1-x))$$
$$^-4\cdot x-1$$

2/99

Exemple

Détermine l'équation de la tangente à la courbe y=(x^2−1)(x^2−2x+1) au point où x=2. Vérifie ta solution à l'aide d'un outil technologique.

$$\frac{dy}{dx}=(2x)\left(x^2-2x+1\right)+\left(x^2-1\right)(2x-2)$$

Lorsque x=2

$$\frac{dy}{dx}=2(2)\left(2^2-2(2)+1\right)+\left(2^2-1\right)(2(2)-2)$$

$$=10$$

Point de tangence

$y=f(2)$

$=\left(2^2-1\right)\left(2^2-2(2)+1\right)$

$=3$

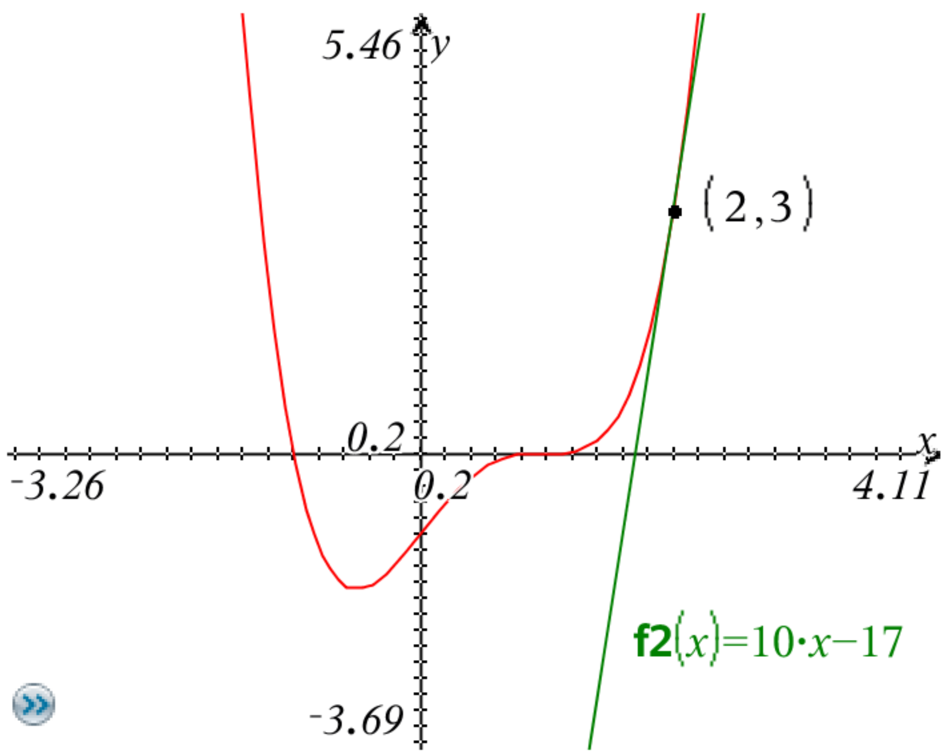
L'équation de la tangente est

$3=10(2)+b$

$3-20=b$

$-17=b$

$y=10x-17$



Exemple

Le conseil étudiant organise son voyage annuel pour assister à un concert à l'extérieur de la ville. Ces trois dernières années, le coût du voyage était de 140$ par personne. À ce prix, les 200 sièges disponibles dans le train étaient comblés. Cette année, le conseil étudiant songe à augmenter le prix du voyage. En s'appuyant sur un sondage effectué auprès des élèves, le conseil estime que pour chaque tranche de 10$ d'augmentation, 5 élèves de moins assisteront au concert.

a) Rédige une équation qui représente le revenu en dollars en fonction du nombre de tranches d'augmentation de 10$.
b) Détermine la dérivée de ton équation et interprète−la pour cette situation.
c) Quel est le taux de variation du revenu lorsque le coût du voyage est de 200$? À ce prix, combien d'élèves assisteront au concert?

a) Soit x, l'augmentation de 10$ du prix et R, le revenu en dollars.

$R(x)=(140+10x)(200-5x)$ *Rappel : revenu = prix * ventes*

b) $R'(x)=10(200-5x)+(140+10x)(-5)$

$=2000-50x-700-50x$

$=1300-100x$

La dérivée représente le taux de variation que subit le revenu à chaque augmentation de 10$.

c) $R'(6)=1300-100(6)$ *Prix de 200$ = 6 augmentation de 10$*

$=700$

Lorsque le prix est de 200$, le taux de variation est de 700$ par augmentation de prix. Le nombre d'élèves qui assisteront au concert est de 170. *(200−5(6))*