La règle de dérivation en chaîne

André et David s'entraînent en vue d'un marathon, une course de grande distance qui couvre 42,195 km (26,22 mi). Tous les dimanches matins à 7 h précises, tous deux sortent pour courir. La maison d'André se trouve à 22 km au sud de la maison de David. Un dimanche, André quitte sa maison pour aller courir et il se dirige vers le nord, à 9 km/h. Au même moment, David quitte sa maison et court vers l'ouest. à 7 km/h. La distance entre les deux coureurs peut être modélisé par la fonction $s(t)=\sqrt{130t^2-396t+484}$, où s est en kilomètres et t en heures.

Tu peux utiliser la dérivée pour déterminer le taux de variation de la distance entre les deux coureurs.

Explore

p. 111 #1 − 4

Réponses aux questions de la rubrique Explore (pages 111 et 112)

1. a) $f(x) = 2x$
   b) $f'(x) = 2$
2. a) $g'(x) = \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ ou $g'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
   b) $g'[h(x)] = \dfrac{1}{3}(8x^3)^{-\frac{2}{3}}$
   c) Les réponses varieront. Par exemple : On peut considérer l'expression $g'[h(x)]$ comme une fonction composée puisqu'elle est composée de la fonction $g'(x)$ où on remplacé x par la fonction $h(x)$.
   d) $h'(x) = 24x^2$
3. a) $g'[h(x)] \times h'(x) = \dfrac{1}{3}(8x^3)^{-\frac{2}{3}} \times 24x^2$
   b) 2
   c) Les résultats dérivés des questions 1 b) et 3 b) sont identiques.
4. a) $f(x) = (g \circ h)(x)$; $f'(x) = g'[h(x)] \times h'(x)$
   b) $f'(x)$ = dérivée de la fonction externe (d'une fonction interne) multipliée par la dérivée de la fonction interne.
   c) $f'(x) = 2(2x^3 - 5)(6x^2)$
   d) $f(x) = (2x^3 - 5)^2$
   $f(x) = (2x^3 - 5)(2x^3 - 5)$
   $f'(x) = (2x^3 - 5)(6x^2) + (2x^3 - 5)(6x^2)$
   $f'(x) = 2(2x^3 - 5)(6x^2)$

La règle de dérivation en chaîne

Soit deux fonctions dérivables g(x) et h(x); la dérivée de la fonction composée f(x)=g[h(x)] est

$$f'(x)=g'[h(x)]\times h'(x)$$

Une fonction composée consiste en une fonction extérieure, g(x), et une fonction intérieure, h(x).

Exemple

Détermine la dérivée de chaque fonction à l'aide de la règle de dérivation en chaîne.

a) $f(x)=(3x-5)^4$

Si $f(x)=g[h(x)]$, donc $g(x)=x^4$ et $h(x)=3x-5$.

$$f'(x)=4(3x-5)^3(3)$$
$$=12(3x-5)^3$$

b) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

Si $f(x)=g[h(x)]$, donc $g(x)=x^{\frac{1}{2}}$ et $h(x)=4-x^2$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}(4-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$
$$=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

La règle de dérivation en chaîne en notation de Leibniz

Si $y=f(u)$ et $u=g(x)$ sont des fonctions dérivables, alors $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$.

Exemple

Détermine la dérivée de chaque fonction selon la notation de Leibniz.

a) $y=-\sqrt{4x^3-3x^2+1}$

Soit $y=-\sqrt{u}$ et $u=4x^3-3x^2+1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(-u^{\frac{1}{2}}\right)}{du}\cdot\frac{d\left(4x^3-3x^2+1\right)}{dx}$$

$$=-\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(12x^2-6x\right)$$

$$=-\frac{12x^2-6x}{2u^{\frac{1}{2}}}$$

$$=-\frac{6x^2-3x}{\sqrt{4x^3-3x^2+1}}$$

b) $y=\left(2x-x^3\right)^{-3}$

Soit $y=u^{-3}$ et $u=2x-x^3$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(u^{-3}\right)}{du}\cdot\frac{d\left(2x-x^3\right)}{dx}$$

$$=-3u^{-4}\left(2-3x^2\right)$$

$$=\frac{-3\left(2-3x^2\right)}{\left(2x-x^3\right)^4}$$

Un raccourci : La règle de dérivation de la puissance d'une fonction

Si $y=u^n$ et $u=g(x)$, alors

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(u^n\right)$$

$$=\left(nu^{n-1}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$=n[g(x)]^{n-1}g'(x)$, où n est une constante et $n\in\mathbb{R}$

Exemple

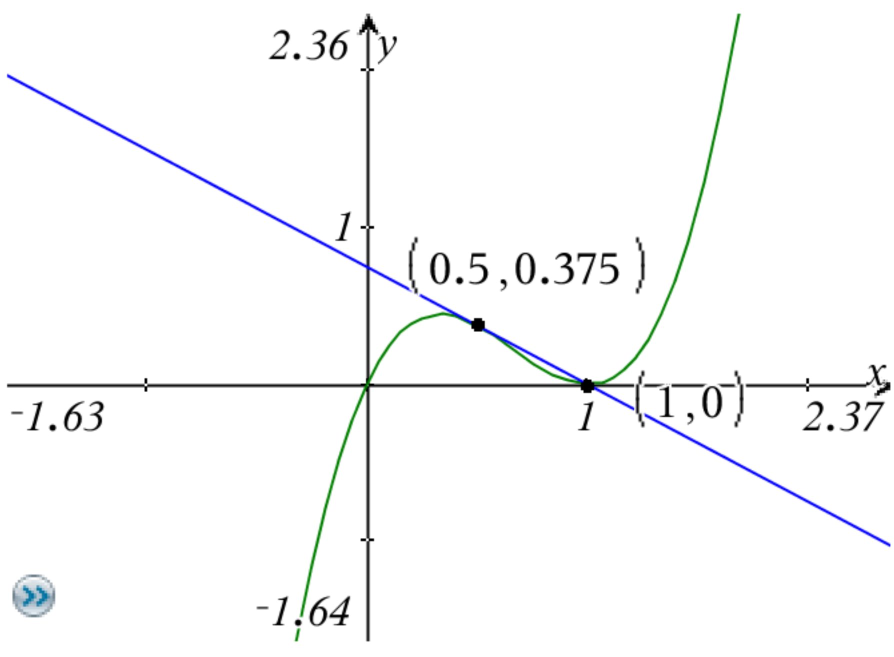
Détermine l'équation de la tangente pour f(x)=3x(1−x)^2 au point où x=0,5.

$$f'(x)=3(1-x)^2+3x[2(1-x)(-1)]$$
$$=3(1-x)^2-6x(1-x)$$
$$=(1-x)[3(1-x)-6x]$$
$$=(1-x)(3-9x)$$

$$f'(0{,}5)=(1-0{,}5)(3-9(0{,}5))$$
$$=-0{,}75$$

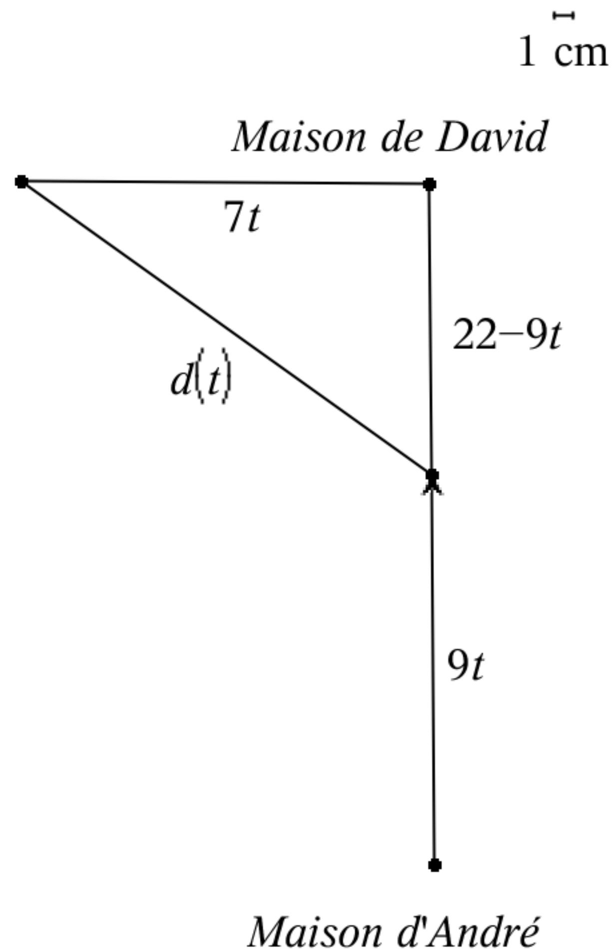
$$f(0{,}5)=3(0{,}5)(1-0{,}5)^2$$
$$=0{,}375$$

$$y-0{,}375=-0{,}75(x-0{,}5)$$
$$y=-0{,}75x+0{,}375+0{,}375$$
$$y=-0{,}75x+0{,}75$$



Exemple

Tu peux utiliser la règle de dérivation en chaîne pour résoudre le problème présenté au début de cette section. Dimanche matin, André et David partent de leur maison à 7h pour aller courir. La maison d'André se trouve à 22km au sud de la maison de David. André court vers le nord à 9km/h, tandis que David court vers l'ouest à 7km/h. Détermine le taux de variation de la distance entre les deux coureurs pour t=1h.



$$d(t)=\sqrt{130t^2-396t+484}$$

$$=\left(130t^2-396t+484\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d'(t)=\frac{1}{2}\left(130t^2-396t+484\right)^{-\frac{1}{2}}(260t-396)$$

$$=\frac{260t-396}{2\sqrt{130t^2-396t+484}}$$

$$d'(1)=\frac{-136}{2\sqrt{218}}$$

$$=-4,6$$

Pour t=1h, la distance entre André et David diminue à 4,6km/h.