Les dérivées de quotients

Exemple

Trouve la dérivée de $q(x)=\frac{6x-5}{x^3+4}$. Indique le domaine de q(x) et q'(x).

$$q(x)=(6x-5)\left(x^3+4\right)^{-1}$$

$$q'(x)=6\left(x^3+4\right)^{-1}+(6x-5)(-1)\left(x^3+4\right)^{-2}\left(3x^2\right)$$

$$=\frac{6}{x^3+4}+\frac{(6x-5)\left(-3x^2\right)}{\left(x^3+4\right)^2}$$

$$=\frac{6\left(x^3+4\right)-(6x-5)\left(3x^2\right)}{\left(x^3+4\right)^2}$$

Domaine de q(x) et q'(x)

$$\left\{x\neq\sqrt[3]{-4}\,,\,x\in\mathbb{R}\right\}$$

On voit la règle de la dérivée du quotient ici :

Suppose que q(x)=g(x)/h(x)

$$q'(x)=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Exemple

Trouve la dérivée de $q(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-1}}$. Indique le domaine de q(x) et q'(x).

Soit $g(x)=x+3$ et $h(x)=\sqrt{x^2-1}$ ou $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$

$$g'(x)=1 \qquad h'(x)=\left(\frac{1}{2}\right)(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}(2x)$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$q'(x)=\frac{1\left(\sqrt{x^2-1}\right)-(x+3)\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{x^2-1}$$

$$=\frac{\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x(x+3)}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^2-1-x^2-3x}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3} \text{ ou } =\frac{-3x-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}$$

Domaine $\{x>1,\ x<-1, x\in\mathbb{R}\}$

Exemple

Détermine l'équation de la tangente à la courbe de $y=\dfrac{x^2-3}{5-x}$ au point où x=2.

$$y'=\frac{2x(5-x)-(x^2-3)(-1)}{(5-x)^2}$$

$$=\frac{10x-2x^2+x^2-3}{(5-x)^2}$$

$$=\frac{-x^2+10x-3}{(5-x)^2}$$

Pente de la tangente

$$y=\frac{-(2)^2+10(2)-3}{(5-2)^2}$$

$$=\frac{13}{9}$$

Point de tangence

$$y=\frac{2^2-3}{5-2}$$

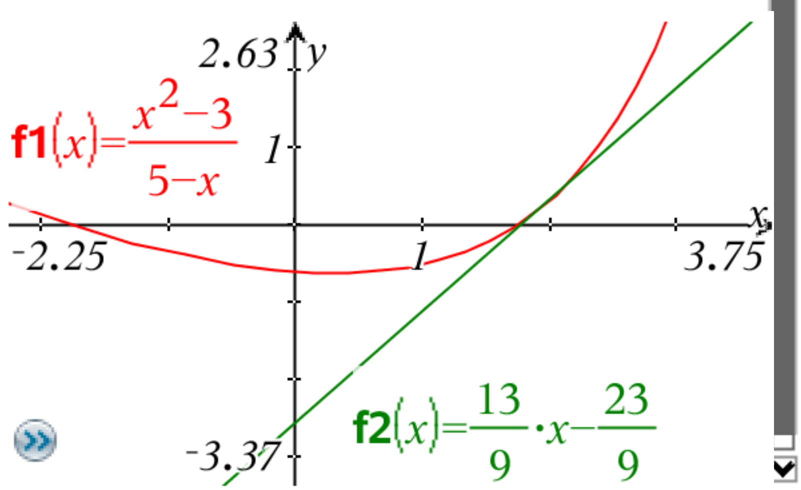
$$=\frac{1}{3}$$

Équation de la tangente

$$\frac{1}{3}=\frac{13}{9}(2)+b$$

$$\frac{-23}{9}=b$$

Donc, $y=\dfrac{13}{9}x-\dfrac{23}{9}$



Exemple

Suppose que la fonction $V(t)=\dfrac{50000+6t}{1+0{,}4t}$ eprésente la valeur, en dollars, d'une automobile neuve, t années après son achat.

a) Quel est le taux de variation de la valeur de l'automobile après 2 ans, 5 ans et 7 ans?

b) Quelle était la valeur initiale de l'automobile?

c) Explique comment tu peux utiliser les valeurs exprimées en a) pour démontrer qu'il est préférable d'acheter une automobile d'occasion plutôt qu'une neuve.

a) $$V'(t)=\frac{6(1+0{,}4t)-(50000+6t)(0{,}4)}{(1+0{,}4t)^2}$$

$$=\frac{6+2{,}4t-20000-2{,}4t}{(1+0{,}4t)^2}$$

$$=\frac{-19994}{(1+0{,}4t)^2}$$

$$V'(2)=\frac{-19994}{(1+0{,}4(2))^2}$$

$$=-6\,170{,}99\$$$

$$V'(5)=\frac{-19994}{(1+0{,}4(5))^2}$$

$$=-2\,221{,}56\$$$

$$V'(7)=\frac{-19994}{(1+0{,}4(7))^2}$$

$$=-1\,384{,}63\$$$

b) La valeur initiale de l'automobile est 50 000$.

c) La valeur de l'automobile diminue à un taux moindre en fonction de son âge. Cela signifierait qu'il est moins sensé d'acheter un véhicule neuf parce qu'il se déprécie rapidement au cours des premières années.