Les problèmes de taux de variation

Les applications du calcul différentiel

En physique : la vitesse et l'accélération, l'analyse du changement de la densité des matériaux, taux du début d'un courant électrique

En biologie : les taux d'accroissement d'une population, le taux de concentration d'un médicament dans la circulation sanguine

En chimie : Le taux de réaction des produits chimiques

En affaires et économie : les taux de variation du profit, du revenu, du coût, du prix et du demande

Fonctions utilisées en économie

La demande : exprimée par p(x) − p est le prix et x est le nombre d'articles vendus

Le revenu : R(x) = xp(x) − les ventes * la demande

Le coût : C(x) − coût total de la production de x unités

Le profit : P(x) = R(x)−C(x) − différence entre le revenu et le coût

Les dérivées aux fonctions appliquées en économie

On utilise le terme ***marginal*** *pour désigner la dérivée d'une fonction appliquée en économie*.

C'(x) − le coût marginal, R'(x) − le revenu marginal, P'(x) − le profit marginal

Exemple

Une entreprise vend mensuellement 1 500 films sur DVD au prix de 10$ chacun. Une étude de marché montre une diminution des ventes de 125 DVD par mois, pour chaque hausse de prix de 0,25$.

a) Détermine la fonction exprimant la demande (ou fonction exprimant le prix).

b) Détermine le revenu marginal lorsqu'on vend 1 000 DVD par mois.

c) Le coût de production de x DVD est C(x)=−0,004x^2+9,2x+5000. Détermine le coût marginal lorsqu'on produit 1000 DVD par mois.

d) Détermine le coût réel de la production du 1 001e DVD.

e) Détermine le profit et le profit marginal provenant des ventes mensuelles de 1000 DVD.

a) Soit p, prix d'un film DVD, x, le nombre de DVD vendus mensuellement, n, le nombre de fois où le prix augmente de 0,25$.

$x=1500-125n$ et $p=10+0,25n$

Donc, $n=\dfrac{1500-x}{125}$

$$p=10+0,25\left(\frac{1500-x}{125}\right)$$
$$=10+3-0,002x$$
$$=13-0,002x$$

Cette fonction indique le prix d'un DVD, lorsqu'un nombre x de DVD est vendu.

b) $R(x)=xp(x)$
$$=x(13-0,002x)$$
$$=13x-0,002x^{2}$$

Le revenu marginal

$$R'(x)=13-0,004x$$

$$R'(1000)=13-0,004(1000)$$
$$=9$$

Lorsque les ventes mensuelles atteignent 1000 DVD, le revenu augmente au taux de 9,00$ par DVD supplémentaire.

c) $C(x)=-0{,}004x^2+9{,}2x+5000$

Le coût marginal

$$C'(x)=-0{,}008x+9{,}2$$
$$C'(1000)=-0{,}008(1000)+9{,}2$$
$$=1{,}20$$

Lorsque la production mensuelle atteint 1000 DVD, le coût marginal est 1,20$.

d) $C(1001)-C(1000)$
$$=\left[-0{,}004(1001)^2+9{,}2(1001)+5000\right]-\left[-0{,}004(1000)^2+9{,}2(1000)+5000\right]$$
$$=10201{,}196-10200{,}00$$
$$=1{,}196$$

Le coût réel de production du 1001e DVD est 1,20$. Remarque la similitude entre le coût marginal du 1000e DVD et le coût réel de production du 1001e DVD. Pour de grandes valeurs de x, le coût marginal lors de la production de x articles est à peu près égal au coût de production d'un article supplémentaire, le (x+1)e article.

e) $P(x)=R(x)-C(x)$

$$=13x-0{,}002x^2-(-0{,}004x^2+9{,}2x+5000)$$

$$=0{,}002x^2+3{,}8x-5000$$

$$P(1000)=0{,}002(1000)^2+3{,}8(1000)-5000$$

$$=800$$

$$P'(x)=0{,}004x+3{,}8$$

$$P'(1000)=0{,}004(1000)+3{,}8$$

$$=7{,}80$$

Lorsque les ventes atteignent 1 000DVD, le profit total est de 800$, et le profit marginal, de 7,80$ par DVD.

Exemple

Un bar laitier vend mensuellement 150 gâteaux à la crème glacée au prix de 40$ chacun. Un sondage effectué auprès des clients indique qu'à chaque réduction du prix de 1$, les ventes augmenteraient de 5 gâteaux.

a) Détermine la fonction exprimant le revenu en fonction du nombre de réductions de prix.

b) Détermine le revenu marginal de la fonction obtenue en a).

c) À quel moment le revenu marginal est−il égale à zéro? Quel est le revenu total à ce moment? En quoi cette information peut−elle être utile aux propriétaires?

a) Prix est $p=40-n$, Ventes est $150+5n$

Donc, le revenu est $R(n)=(40-n)(150+5n)$

b) $R'(n) = -1(150+5n)+(40-n)(5)$

$= -150-5n+200-5n$

$= -10n+50$

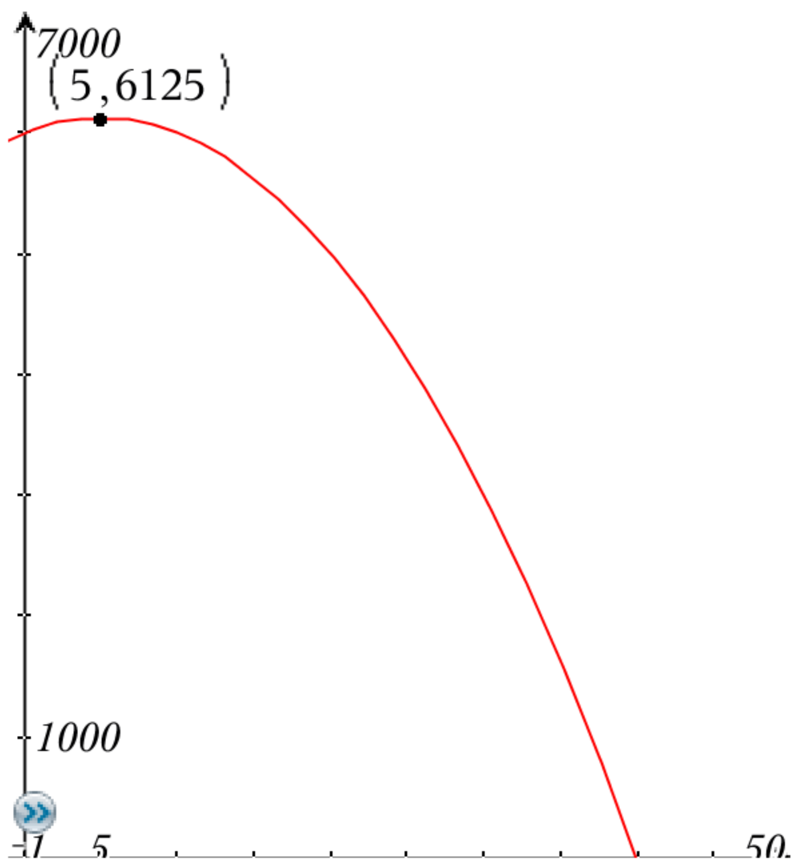
c) $0 = -10n+50$

$n = 5$

Le revenu marginal est zéro lorsque le prix du gâteau diminue cinq fois de 1$. Le gâteau se vend alors 35$.

$R(5) = (40-5)(150+5(5))$

$= 6125$



Lorsque le prix du gâteau est 35$, le revenu total est de 6 125$.

Les propriétaires devraient utiliser cette information pour réaliser qu'en réduisant le prix du gâteau passé 35$, les ventes augmenteront, mais le revenu total diminuera.

Il y a d'autres exemples aux pages 134 - 136 (applications en physique, électricité, la densité linéaire)