Unité 3 – Les graphiques et l'optimisation

Mise en situation

Quelle est la quantité de métal nécessaire pour fabriquer une boîte de soupe de 400ml?

Quelle est la plus petite quantité de carton nécessaire pour fabriquer une boîte contenant 3000 cm3 de céréales?

En étudiant la relation entre la dérivée d'une fonction et la forme de son graphique, tu pourras répondre à des questions de ce genre.

Tu détermineras les caractéristiques clés d'un graphique et tu apprendras à déterminer les valeurs optimales dans des situations concrètes.

Problème du chapitre

Naveen a acheté 20 m de bordure flexible. Il prévoit aménager un jardin dans chaque coin arrière de sa propriété : un jardin carré et un en forme de quart de cercle. Il utilisera la bordure à l'intérieur des limites prévues, comme le montre le schéma. Comment Naveen peut-il diviser la bordure en deux sections pour maximiser l'aire totale des deux jardins? Suppose que chaque section doit mesurer au moins 5 m.

3.1 Les fonctions croissantes et décroissantes

Mise en situation

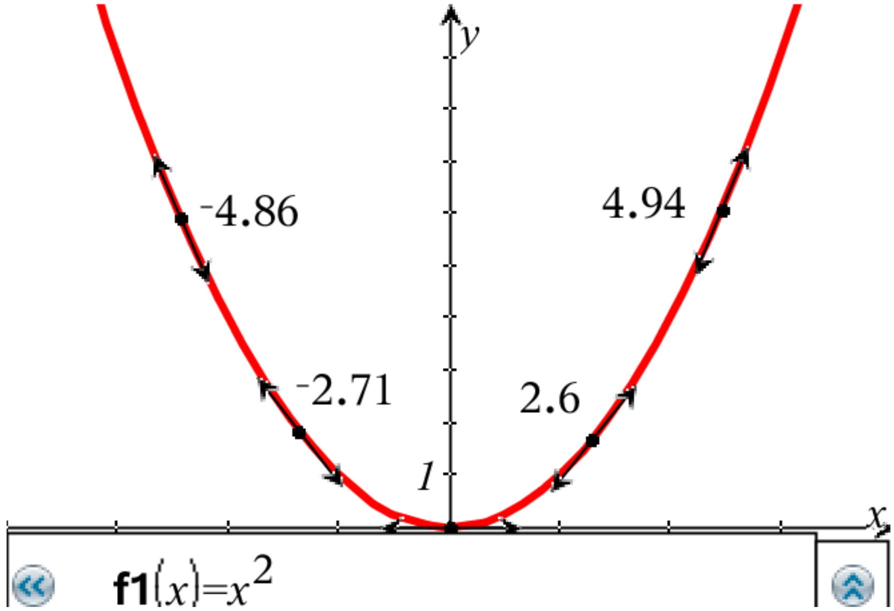
Dans bien des cas, il est utile de savoir si les quantités sont croissantes ou décroissantes.

Une entreprise peut s'intéresser aux facteurs qui amènent une croissance de productivité ou, à l'inverse, une décroissance des coûts.

En étudiant l'accroissement et la diminution de la population, les gouvernements peuvent prévoir les besoins en services essentiels, comme les soins de santé.

Rappel
Une fonction est croissante lorsque les pentes de tangente sont positives et *décroissante* lorsque les pentes de tangente sont *négatives*.

Donc,
y'>0, la fonction est croissante
y'<0, la fonction est décroissante
y'=0, la fonction est ni croissante, ni décroissante



Exemple
Détermine les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction définie par f(x)=2x^(3)+3x^(2)−36x+5.

$f(x)=2x^3+3x^2-36x+5$

$f'(x)=6x^2+6x-36$

Si je trouve les zéros de la dérivée, je peux évaluer les intervalles.

$0=x^2+x-6$ (j'ai tout divisé par 6)

$0=(x+3)(x-2)$

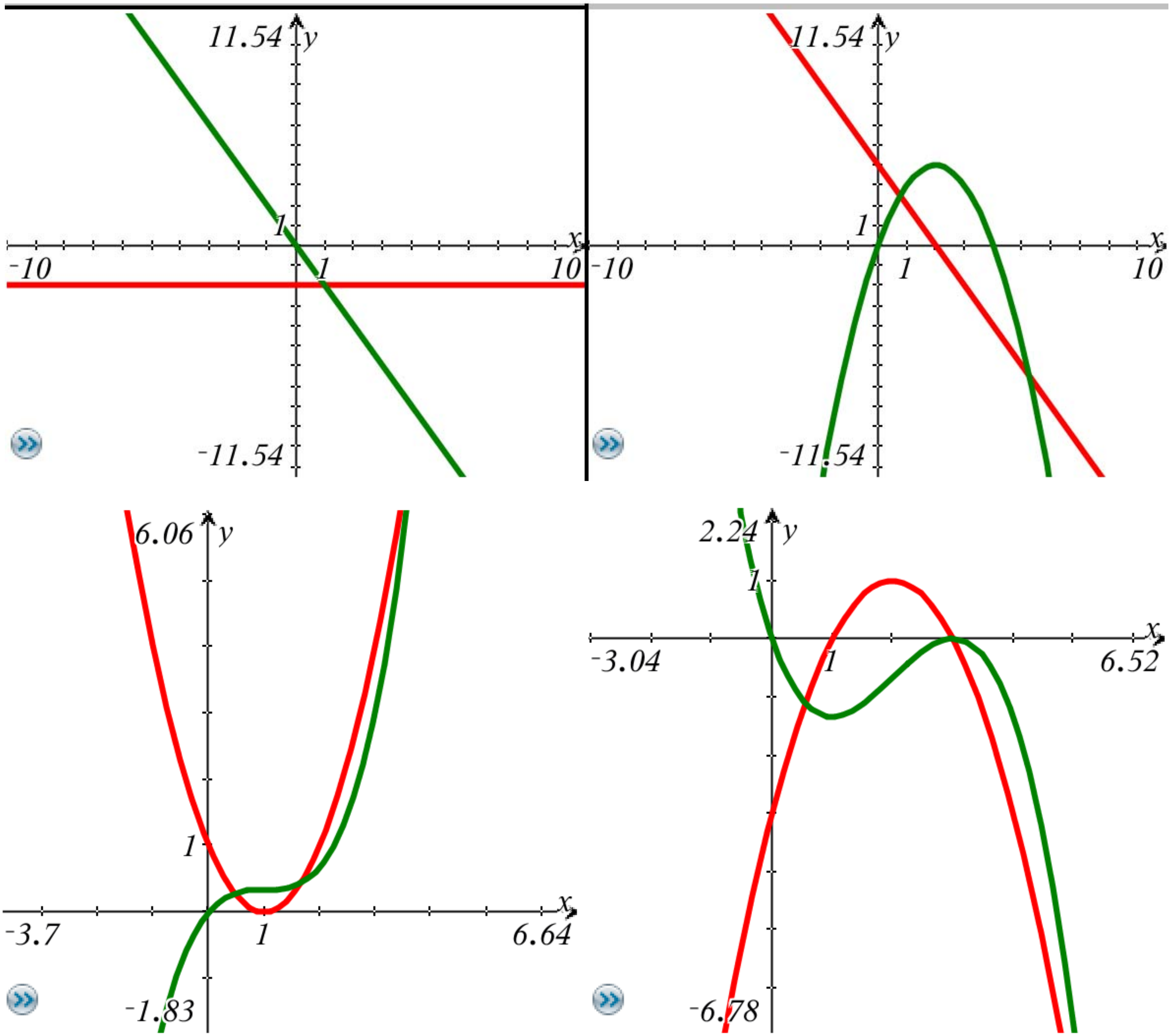
Donc, $f'(x)=0$ à x=−3 et x=2

$f'(-5)>0$ $\quad$ $f'(0)<0$ $\quad$ $f'(4)>0$

Donc, la fonction est croissante sur $x<-3$ et $x>2$ et décroissante sur $-3<x<2$.

Exemple

Pour chaque fonction, utilise le graphique de la dérivée pour esquisse le graphique de la fonction.



Exemple

La fonction T(j)=−((5)/(18))j^(2)+((15)/(9))j+37, où $0<j<6$, correspond approximativement à la température d'une personne porteuse d'une certaine souche de la grippe. T représente la température de la personne, en degrés Celcius, et j le nombre de jours depuis l'apparition des premiers symptômes. Au cours de quel intervalle la température de la personne sera−t−elle croissante?

$$T(j)=-\frac{5}{18}j^2+\frac{15}{9}j+37$$

$$T'(j)=-\frac{5}{9}j+\frac{15}{9}$$

$$0=-\frac{5}{9}j+\frac{15}{9}$$

$$0=-5j+15$$

$$0=-j+3$$

$$j=3$$

Donc, la température est ni croissante, ni décroissante à $j=3$.

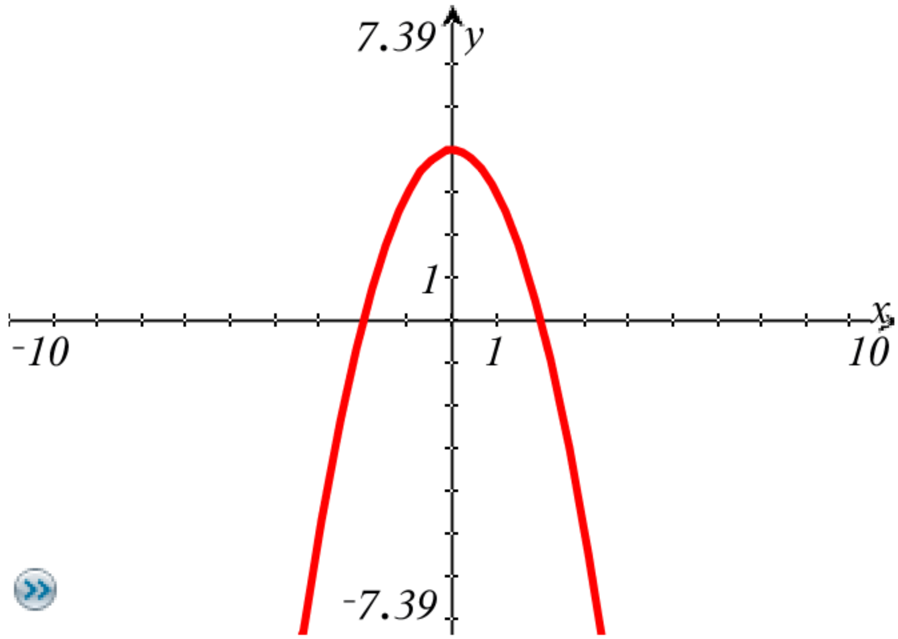
$T'(2)>0$ et $T'(4)<0$

La température de la personne est croissante dès le premier jour de l'apparition des premiers symptômes jusqu'au troisième jour.

Exemple

Esquisse le graphique d'une fonction continue pour l'ensemble de conditions suivants :

1. f'(x)>0 lorsque x<0
2. f'(x)<0 lorsque x>0
3. f(0)=4



Journal

Une fonction affine n'est ni croissante ni décroissante. Cet énoncé est−il toujours vrai, parfois vrai ou toujours faux? Explique ta réponse.

Cet énoncé toujours faux. Une fonction affine est soit croissante ou décroissante puisque la dérivée d'une fonction affine est toujours positive ou négative, mais jamais nulle.
Une droite horizontale est ni croissante ni décroissante puisque sa dérivée est nulle.