3.2 Les maximums et les minimums

Explore

1. Activité – Analyse la dérivée (pages 1.1 à 2.2)

Questions

1. Remarque ce qui arrive à la grandeur et au signe de la pente.
2. Décris ce qui arrive à la pente lorsque la tangente se déplace de gauche à droite passant par les points suivantes :
   - Le point le plus élevé du graphique;
   - Le point le moins élevé du graphique.

Refais l'activité pour les 5 fonctions à la page 159 (Explore).

Un point maximum

Un point du graphique où la fonction change de croissante à décroissante.
C'est le point où la valeur de la dérivée passe de positive à nulle puis à négative.

Un point minimum

Un point du graphique où la fonction change de décroissante à croissante.
C'est le point où la valeur de la dérivée passe de négative à nulle puis à positive.

Extremums locaux

Les valeurs maximales et minimales locales (dans un voisinage du graphique) d'une fonction.

Maximum/minimum absolu

La valeur la plus grande ou la plus petite d'une fonction.

Un nombre critique

La valeur a du domaine de la fonction où $f'(a)=0$ ou $f'(a)$ n'existe pas. C'est le nombre qui rend la dérivée nulle.

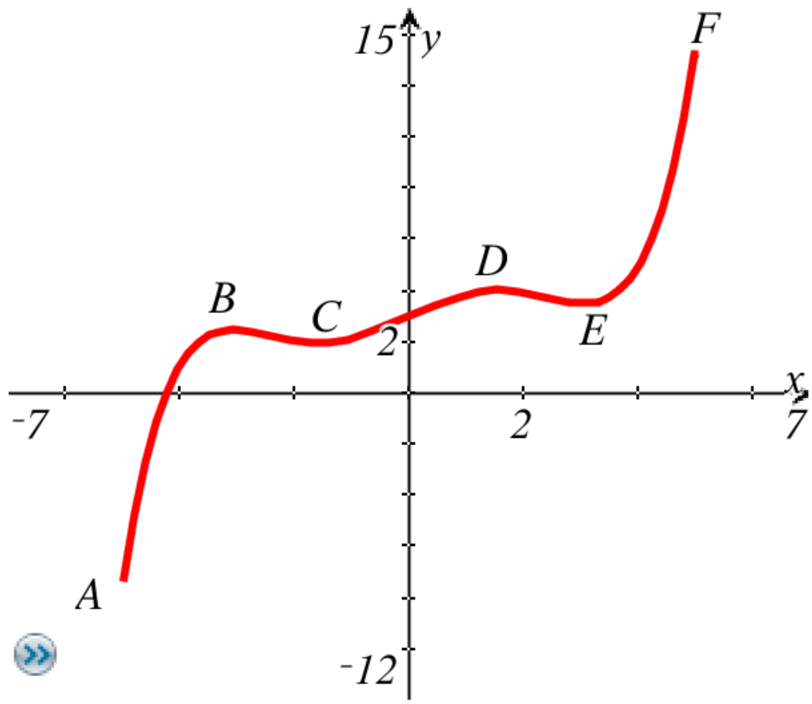
Un point critique

Si a est un nombre critique, le point (a, f(a)) est un point critique.

Exemple

Soit le graphique d'une fonction sur l'intervalle $-5<x<5$.

a) Indique les points maximums locaux.
b) Indique les points minimums locaux.
c) Qu'ont en commun tous les points que tu as nommés en a) et en b)?
d) Indique le maximum absolu et le minimum absolu sur l'intervalle $-5<x<5$.
e) Qu'est−ce qui diffère les points de a) et b) et les points de d)?

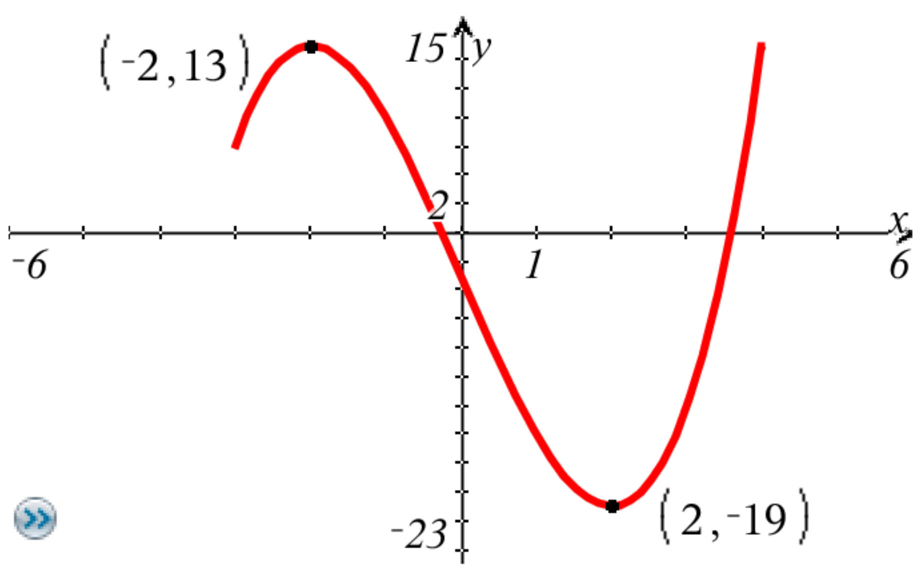


a) Les points maximums locaux sont les points B et D.
b) Les points minimums locaux sont les points C et E.
c) Les points B, D, C, E ont tous une pente de la tangente nulle en ce point. Aux points B et D, la pente de la tangente passe de positif à négatif. Aux points C et E, la pente de la tangente passe de négatif à positif.

d) Le maximum absolu est le point F et le minimum absolu est le point A.
e) La pente de la tangente est indéfinie aux points F et A, comparé à la pente de la tangente nulle aux points B, C, D et E.

Exemple

Détermine le maximum absolu et le minimum absolu de la fonction f(x)=x^(3)−12x−3 dans l'intervalle $-3\leq x\leq 4$.



$f(x)=x^3-12x-3$

$f'(x)=3x^2-12$

$0=x^2-4$

$0=(x-2)(x+2)$

$x=2$ et $x=-2$ sont des nombres critiques, ainsi que $x=-3$ et $x=4$.

Afin de vérifier si les nombres critiques sont des max ou des mins, il faut vérifier le croissance et la décroissance de la fonction.

$f'(-2{,}5)>0$ $\quad$ $f'(0)<0$ $\quad$ $f'(2{,}5)>0$

Donc, il y a un maximum local en $x=-2$ et un minimum local en $x=2$.

$f(-2)=13$, $f(2)=-19$, $f(-3)=6$, $f(4)=13$ est un point critique.

Donc, le maximum absolu de la fonction est 13 et le minimum absolu de la fonction est −19.

Exemple

L'aire totale d'un contenant cylindrique est de 100 cm^(2). Son volume est défini par la fonction V=50r−πr^(3), où r représente le rayon du cylindre, en centimètres. Calcule le volume maximal du cylindre dans chacun des cas.

a) Le rayon ne peut dépasser 3cm.

b) Le rayon ne peut dépasser 2cm.

$V'=50-3\pi r^2$

$0=50-3\pi r^2$

$3\pi r^2=50$

$r=\sqrt{\dfrac{50}{3\pi}}$

$r=2{,}3$

$0<r<2{,}3$ – $V'(2)>0$

$2{,}3<r<3$ – $V'(2{,}5)<0$

$V(2{,}3)=76{,}78$

$V(3)=65{,}18$

Le volume maximal du cylindre est donc 76,78cm^3.

Si le rayon ne peut pas dépasser 2cm, donc le volume maximal est atteint à 74,86cm^3.

Journal

Si la dérivée est nulle, il doit y avoir un maximum ou un minimum local. Cet énoncé est−il vrai ou faux? Explique ta réponse.

Si la dérivée est nulle, il n'y a pas nécessairement un maximum ou un minimum local. Cet énoncé est faux. Pour avoir un maximum ou un minimum local, il faut que la dérivée soit nulle et qu'elle change de signe à gauche et à droite du point.