3.3 La concavité et le test de la dérivée seconde

Mise en situation

Deux voitures roulent côte à côte. Elles vont dans la même direction, à une vitesse de 80km/h. Puis, l'un des conducteurs ralentit tandis que l'autre accélère. Quelles serait les différences entre deux graphiques qui modélisent le trajet de chaque voiture? Quelles seraient les similitudes?

Dans cette section, tu examineras ce que cela signifie lorsque la pente de la tangente est croissante ou décroissante et tu feras le lien avec la forme du graphique de la fonction.

Exploration

Rappel – Le test de la dérivée première (sur TInspire)
Activité – Les maximums, les minimums et les zéros (sur TInspire)

Concave vers le haut

Le graphique se courbe vers le haut comme s'il enveloppait un point au–dessus de la courbe.
La dérivée seconde est positive sur cet intervalle.

Concave vers le bas

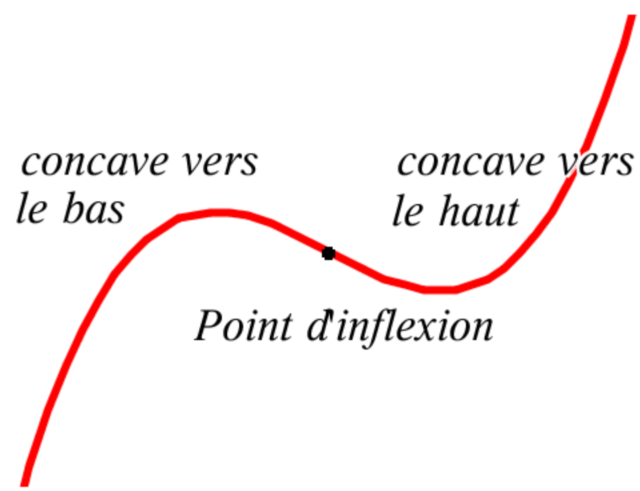
Le graphique se courbe vers le bas comme s'il enveloppait un point au–dessus de la courbe.
La dérivée seconde est négative sur cet intervalle.

Un point d'inflexion

Le point où la concavité du graphique change de sens.
La dérivée seconde est nulle ou non définie en ce point.

Exploration

Activité – Graphique de la dérivée seconde (sur TInspire)



À copier!
Le tableau de la page 169 (Test de la dérivée seconde)

Exemple
Détermine les points d'inflexion et les intervalles de concavité du graphique de f(x)=x^4−6x^2−5.

$$f'(x)=4x^3-12x$$

$$f''(x)=12x^2-12$$

Au point d'inflexion, f'' est nulle et son signe passe de passe de positif à négatif ou l'inverse.

$$0=12x^2-12$$

$$0=x^2-1$$

$$0=(x-1)(x+1)$$

$$x=1 \text{ } ou \text{ } x=-1$$

On vérifie le comportement de f'' pour les intervalles x<−1, −1<x<1 et x>1.

$f''(-2)>0$ $\qquad$ $f''(0)<0$ $\qquad$ $f''(2)>0$

$f(1)=-10$ et $f(-1)=-10$

Donc, il y a des points d'inflexions à (−1,−10) et (1,−10). Le graphique est concave vers le haut sur $x<-1$ *et* $x>1$ et concave vers le bas sur $-1<x<1$.

Exemple

Détermine les nombres critiques. Puis, utilise le test de la dérivée seconde pour déterminer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

a) $f(x)=x^3-3x^2+2$

b) $f(x)=x^4$

a) $f'(x)=3x^2-6x$

$f''(x)=6x-6$

<u>Les nombres critiques</u>

$0=3x^2-6x$

$0=3x(x-2)$

$x=0 \; et \; x=2$

$f''(0)=-6$ (négative − concave vers le bas)

$f''(2)=6$ (positive − concave vers le haut)

Donc, il y a un minimum en x=2 et un maximum en x=0.

b) $f'(x)=4\cdot x^3$

$f''(x)=12x^2$

Le nombre critique est $x=0$

$f''(0)=0$

Puisque $f''(0)=0$, il s'agit d'un point d'inflexion et non d'un max/min.

Exemple

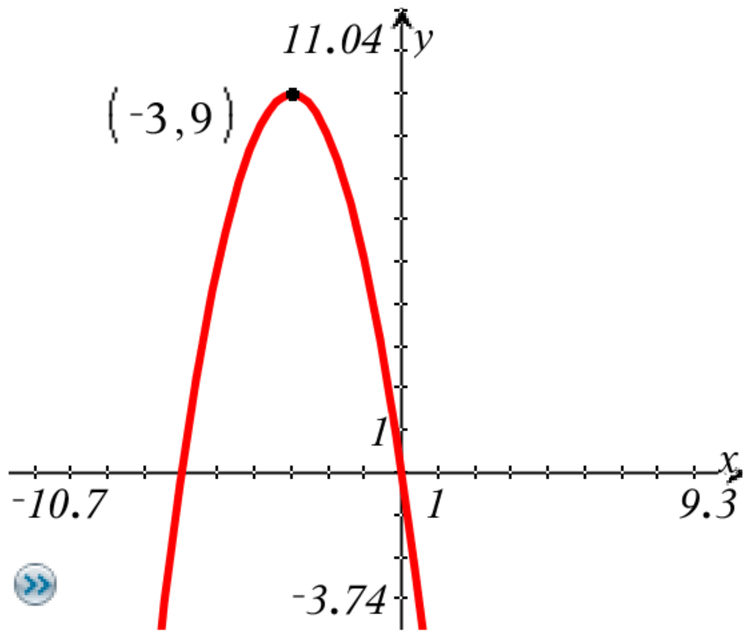
Esquisse le graphique d'une fonction qui satisfait à chaque ensemble de conditions.

a) $f''(x)=-2$ pour toutes les valeurs de x et $f'(-3)=0$, $f(-3)=9$

b) $f''(x)<0$ lorsque $x<-1$, $f''(x)>0$ lorsque $x>-1$, $f'(-3)=0$ et $f'(1)=0$

a) $f''(x)=-2$ donc le graphique est toujours concave vers le bas.

$f'(-3)=0$, il y a donc un maximum local en ce point.



b) $f''(x)<0$ pour $x<-1$

Le graphique est concave vers le bas.

$f''(x)>0$ pour $x>-1$

Le graphique est concave vers le haut.

$x=-1$ est un point d'inflexion

$f'(-3)=0$ sur concave vers le bas

Donc c'est un maximum local.

$f'(1)=0$ sur concave vers le haut

Donc c'est un minimum local.