3.4 Les fonctions rationnelles simples

Rappel

Une asymptote verticale

Les fonctions rationnelles ont habituellement une asymptote verticale aux valeurs de x qui rendent le dénominateur nul.
La droite x = a est une asymptote verticale si la fonction tend vers infini lorsque x tend vers a par la gauche ou par la droite.

Une asymptote horizontale

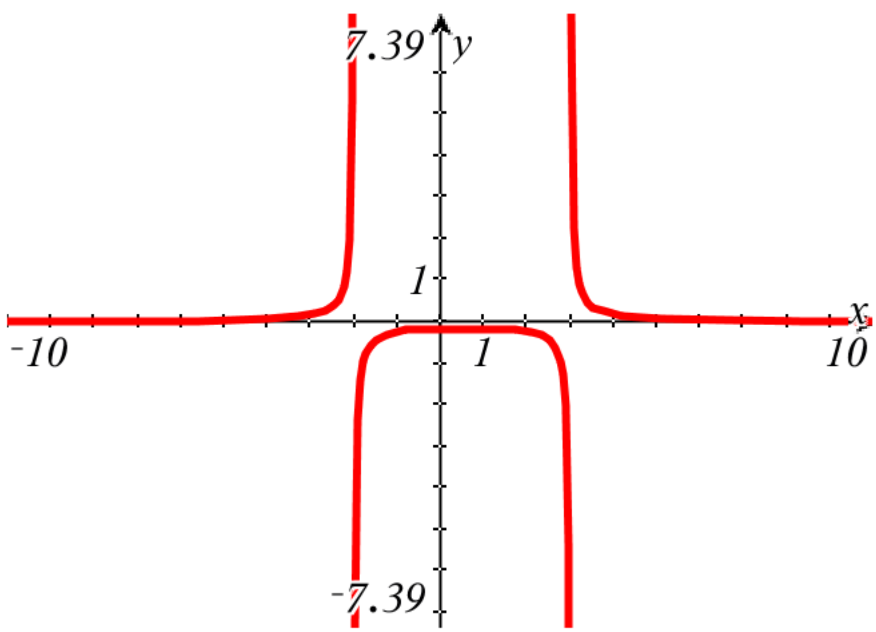
Les fonctions rationnelles ont une asymptote horizontale lorsque la limite à l'infini d'une fonction tend vers une valeur numérique.
La droite y=a est une asymptote horizontale si la fonction tend vers une valeur lorsque x tend vers infini ou lorsque x tend vers négatif infini.

Exemple

Soit la fonction f(x)=1/((x+2)(x−3)). Détermine les asymptotes verticales et horizontales possibles.

Les asymptotes verticales sont à x=-2 et x=3.
L'asymptote horizontale est à y=0.

$x\to\pm\infty$



Exemple

Soit la fonction définie par f(x)=1/((x^2+1)).

a) Détermine les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.

b) Détermine tout point d'inflexion.

c) Explique pourquoi le graphique ne croise jamais l'axe des x et pourquoi il n'y a pas d'asymptotes verticales.

d) Trace le graphique de la fonction.

a) $f'(x)=\dfrac{0(x^2+1)-1(2x)}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$0=-2x$

$0=x$

Donc, (0,1) est un point critique.

$f'(-1)>0$ et $f'(1)<0$

La fonction est décroissante lorsque $x>0$ et croissante lorsque $x<0$.

b) $f''(x)=\dfrac{-2(x^2+1)^2-(-2x)(2(x^2+1)(2x))}{(x^2+1)^4}$

$=\dfrac{-2(x^2+1)+8x^2}{(x^2+1)^3}$

$=\dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$

$0=6x^2-2$

$x^2=\frac{1}{3}$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

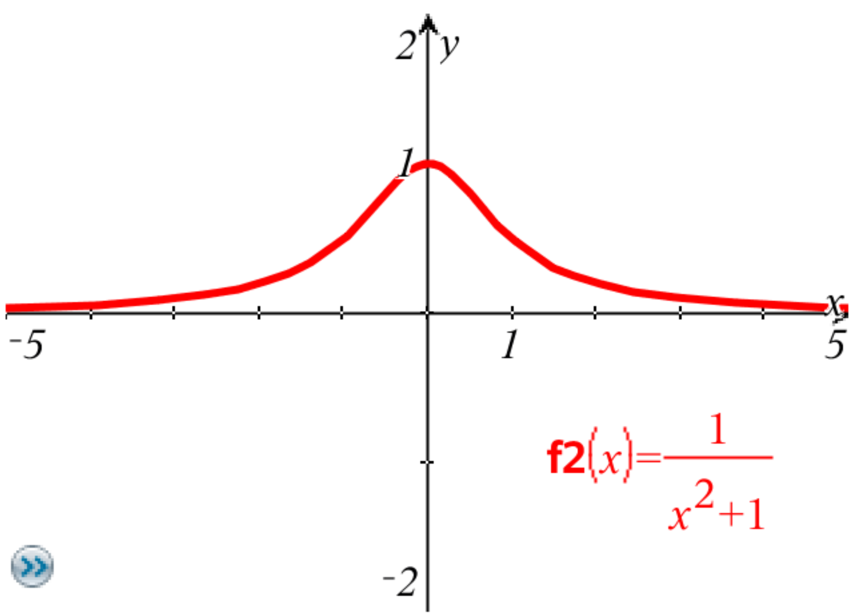
$x<-\frac{1}{\sqrt{3}}, f''(x)>0$ concave vers le haut

$-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}, f''(x)<0$ concave vers le bas

$x>\frac{1}{\sqrt{3}}, f''(x)>0$ concave vers le haut

Donc, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{3}{4}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{3}{4}\right)$ sont des points d'inflexion.

c) Le numérateur est une constante positive et le dénominateur est positif pour toutes les valeurs de x, donc la valeur de f(x) est toujours positive. Puisqu'il n'y a aucune valeur de x pour laquelle la fonction est non définie, il n'y a aucune asymptote verticale.



d) Puisque la valeur de y tend vers 0 lorsque x tend vers infini, le graphique a une asymptote horizontale à y=0.

Exemple

Détermine les intervalles de concavité de f(x)=−1/(x+2). Trace son graphique.

$$f(x)=\frac{-1}{x+2}$$

$$f'(x)=\frac{0(x+2)-(-1)(1)}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{0(x+2)^2-1(2(x+2)(1))}{(x+2)^4}$$

$$=\frac{-2}{(x+2)^3}$$

Il n'y a aucun point d'inflexion puisque f''(x) n'a pas de zéros.

Donc, il faut étudier la fonction à gauche et à droite de l'asymptote verticale x=−2.

$f''(-3)>0$ positif et concave vers le haut

$f''(0)<0$ négatif et concave vers le bas

Donc, f(x) est concave vers le haut sur x<−2 et concave vers le bas sur x>−2.