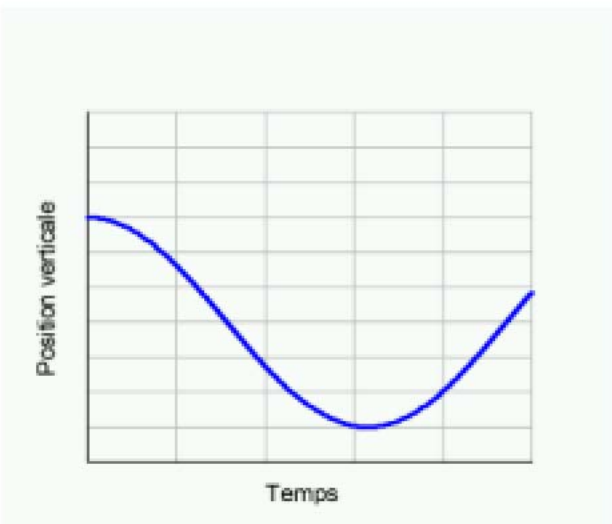
4.2 Le taux de variation instantanée des fonctions sinusoïdales

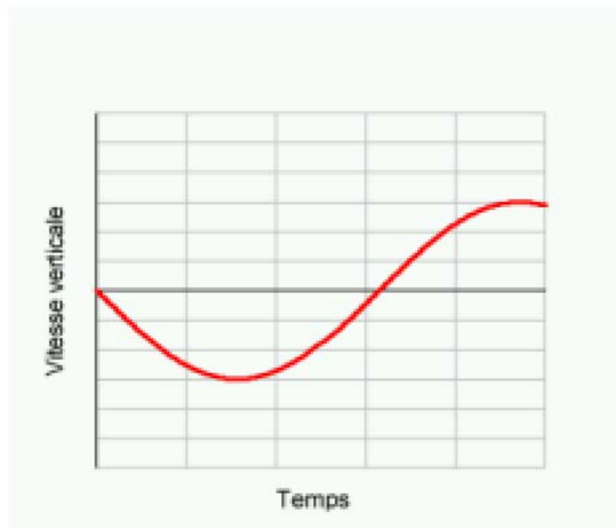
Mise en situation

http://www.bungeezone.com/Movies/patrick.mpg

La position verticale d'une personne qui fait un saut à l'élastique peut être modélisée par une fonction sinusoïdale.



La vitesse verticale de cette même personne est aussi modélisée par une fonction sinusoïdale.



Les dérivées des fonctions trigonométriques

$f(x)=\sin x \qquad f'(x)=\cos x$

$f(x)=\cos x \qquad f'(x)=-\sin x$

$f(x)=\tan x \qquad f'(x)=\sec^2 x$

$f(x)=\operatorname{cosec} x \qquad f'(x)=-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x$

$f(x)=\sec x \qquad f'(x)=\sec x \tan x$

$f(x)=\operatorname{cotan} x \qquad f'(x)=-\operatorname{cosec}^2 x$

Exemple

Détermine chaque dérivée en fonction de x.

a) $y=2sinx$

$y'=0(sinx)+2(cosx)$

$=2cosx$

b) $f(x)=-3cosx$

$f'(x)=(0)cosx+(-3)(-sinx)$

$=3sinx$

c) $y=sinx+cosx$

$y'=cosx-sinx$

d) $y=2cosx-4sinx$

$y'=-2sinx-4cosx$

Exemple

Détermine la pente de la tangente au graphique de $f(x)=3sinx$ **au point où** $x=\frac{\pi}{4}$.

$f'(x)=3cosx$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Exemple

Détermine l'équation de la tangente au graphique de $f(x)=-2sinx$ au point où $x=\frac{\pi}{6}$.

Pente de la tangente

$f'(x)=-2cosx$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=-\sqrt{3}$$

Point de tangence

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=-1$$

Équation de la tangente

$y=mx+b$

$$-1=\left(-\sqrt{3}\right)\left(\frac{\pi}{6}\right)+b$$

$$-1+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}=b$$

Donc, l'équation de la tangente est $y=-\sqrt{3}\,x-1+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}$.