4.4 Les applications des fonctions sinusoïdales et de leurs dérivées

Exploration

Une fonction sinusoïdale peut servir à modéliser le mouvement d'un pendule simple.
En utilisant une simulation sur Internet, réponds aux questions #2 - 6 - p. 233
http://www.youtube.com/watch?v=lZTaX4u-Z_k
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/tension_pendule.html
http://www.spc.ac-aix-marseille.fr/phy_chi/Menu/Activites_pedagogiques/Pendule_visuel/Simulation.htm

Les mouvements harmoniques

Un mouvement harmonique simple
Un mouvement périodique symétrique par rapport à un point d'équilibre

Un mouvement harmonique amorti
Un mouvement semblable au mouvement harmonique simple, mais avec frottement. L'amplitude du pendule diminue donc en fonction du temps. La force de rétablissement n'est pas linéaire.
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/pend_pesant1.html

Exemple

Pour les petites amplitudes, et en ne tenant pas compte des effets de frottement, le pendule offre un exemple de mouvement harmonique simple. Une fonction sinusoïdale peut modéliser ce type de mouvement.
- Son graphique possède alors une amplitude constante.
- La période dépend de sa longueur et peut être calculée à l'aide de la relation $T=2\pi\sqrt{(l/g)}$ (T est la période en secondes, l est la longueur en mètres et g est l'accélération due à la force gravitationnelle (9,8m/s^(2)).
- La position horizontale de la masse par rapport au temps est donné par la fonction $h(t)=A\cos(2\pi t/T)$ (A est l'amplitude, t, le temps en secondes et T, la période en secondes).

Détermine la vitesse maximale de la masse et le premier moment où elle est atteinte pour un pendule de 1,0m de longueur et une amplitude de 5cm.

$$h(t)=A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

$$=5\cos\left(\frac{2\pi t}{2\pi\sqrt{\frac{1}{9,8}}}\right)$$

$$=5\cos(\pi t)$$

$$h'(t)=-5\pi\sin(\pi t)$$

$$h''(t)=-5\pi^2\cos(\pi t)$$

$$0=-5\pi^2\cos(\pi t)$$

$$0=\cos(\pi t)$$

$$\pi t=\cos^{-1}(0)$$

Donc, $\pi t=\frac{\pi}{2}$ ou $t=\frac{1}{2}$

Il faut inclure tous les temps que c'est maximale.

Donc, $t=\frac{1}{2}+2k,\ k\in\mathbb{R}$

La vitesse maximale est donc $h'\left(\frac{1}{2}\right)=-5\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ou -5π.

Donc, la vitesse maximale est d'environ 15,7cm/s.

Exemple

Un bloc d'alimentation transmet un signal de tension qui consiste en un courant alternatif (CA) et un courant continu (CC). La fonction V(t)=5sint+12 représente la tension V, en volts, en fonction du temps t, en secondes.

a) Détermine les tensions maximales et minimale. À quel moment ces valeurs ont−elles lieu?

b) Pour ce signal, détermine la période T, en secondes, la fréquence f, en hertz, et l'amplitude A, en volts.
(La fréquence est l'inverse la période)

$V'(t)=5cost$

$0=5cost$

$0=\cos(t)$

$t=\cos^{-1}(0)$

$t=\frac{\pi}{2}$ pour la tension maximale et $t=\frac{3\pi}{2}$ pour la tension minimale.

$V\left(\frac{\pi}{2}\right)=17$ est la tension maximale et $V\left(\frac{\pi}{2}\right)=7$ est la tension minimale.

Les tensions maximales ont lieu lorsque $t=\frac{\pi}{2}+2k,k\in\mathbb{R}$ et les tensions minimales ont lieu lorsque $t=\frac{3\pi}{2}+2k,k\in\mathbb{R}$.

b) La période est donc 2π secondes.

La fréquence est de 1/2π hertz.

L'amplitude est de 5 volts.