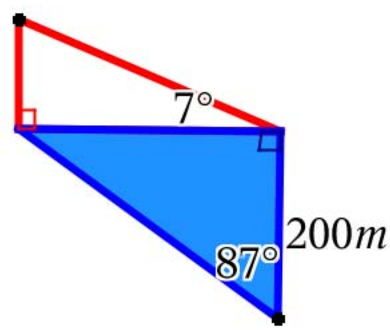
5.5 Les problèmes en trois dimensions

Près des pistes de certains aéroports se trouvent des obstacles − tours, collines ou grands immeubles − dont la hauteur est souvent impossible à mesurer directement. Pendant un vol aux instruments (lorsqu'il y a du brouillard ou de la neige), la pilote ou le pilote de l'avion qui décolle ne peut pas voir ces obstacles. Pour permettre ces décollages aux instruments, un aéroport doit publier la vitesse d'ascension minimale nécessaire pour éviter tout obstacle.

Exploration

Une colline dont la hauteur et la distance sont inconnues est située devant l'extrémité de la piste 09 (décollage vers l'est) de l'aéroport de Cité. À partir de l'extrémité de la piste, l'angle d'élévation de la colline est de 7°. À partir d'un point situé à 200m au sud de l'extrémité de la piste, la base de la colline et l'extrémité de la piste forment un angle de 87°.

a) Fais un schéma représentant la situation.



b) Détermine la distance, au mètre près, entre l'extrémité de la piste et la base de la colline.

Soit d, la distance entre l'extrémité de la piste et la base de la colline.

$$tan87=\frac{d}{200}$$

$$d=200tan87$$

$$d=3\ 816,23m$$

c) Détermine la hauteur de la colline, à 10m près.

Soit h, la hauteur de la colline.

$$tan7=\frac{h}{3816{,}23}$$

$$h=3816{,}23tan7$$

$$h=468{,}57m$$

d) La vitesse d'accélération nécessaire peut être exprimée en mètres au kilomètre à partir de l'extrémité de la piste. Quelle vitesse d'ascension faut-il pour qu'un avion évite tout juste le sommet de la colline?

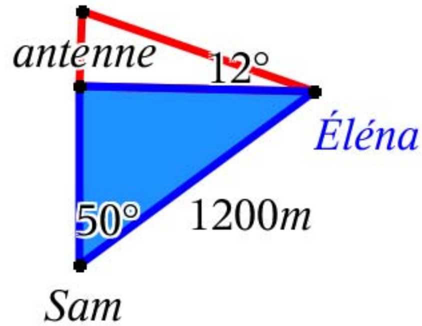
$$\begin{aligned}Vitesse &= \frac{468{,}57m}{3{,}816km}\\ &= 122{,}79m/km\end{aligned}$$

e) Pour des raisons de sécurité, la réglementation exige que la vitesse d'ascension de l'avion lui permette d'éviter l'obstacle avec une certaine marge, habituellement 300m. Pour respecter cette règle, quelle vitesse d'ascension est nécessaire?

$$\begin{aligned}Vitesse &= \frac{468{,}57+300}{3{,}816}\\ &= 201{,}4\ m/km\end{aligned}$$

Exemple

Une antenne radio se trouve directement au nord de la maison de Sam. Sam marche jusqu'à la maison d'Éléna, à 1200m de la sienne dans la direction 50°EN. Vue de la maison d'Éléna, l'antenne est située à l'ouest, avec un angle d'élévation de 12°. Détermine la hauteur de l'antenne au mètre près.



Soit d, la distance entre l'antenne et la maison d'Éléna et h, la hauteur de l'antenne.

$$sin50 = \frac{d}{1200}$$

$$d = 1200 sin50$$

$$d = 919{,}253 m$$

$$tan12 = \frac{h}{919{,}253}$$

$$h = 919{,}253 tan12$$

$$h = 195{,}393$$

La hauteur de l'antenne est de 195m.

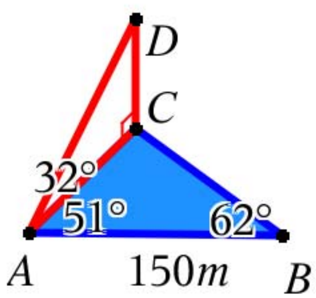
Exemple

Un arpenteur veut mesurer la hauteur d'une falaise située sur l'autre rive d'une rivière. Il établit une base géodésique AB d'une longueur de 150m. Du point A, il choisit un point C à la base de la falaise et détermine que m∠CAB=51°. Il choisit ensuite un point D au sommet de la falaise, directement au−dessus du point C, et mesure un angle d'élévation de 32°. Du point B, il détermine que m∠CBA=62°.

a) Fais un schéma afin de représenter la situation.

b) Quelle longueur déterminerais−tu en premier? Détermine cette longueur, au mètre près.

c) À l'aide de quelle relation peux−tu déterminer la hauteur de la falaise? Détermine la hauteur de la falaise au mètre près.



b) Je déterminerais la longueur de AC.

$$\angle ACB = 180-51-62$$

$$=67°$$

$$\frac{sin67}{150}=\frac{sin62}{AC}$$

$$AC=\frac{150sin62}{sin67}$$

$$AC=143{,}88m$$

c) On peut utiliser le rapport trigonométrique de $tan32$ pour trouver la hauteur de la falaise.

Soit h, la hauteur de la falaise.

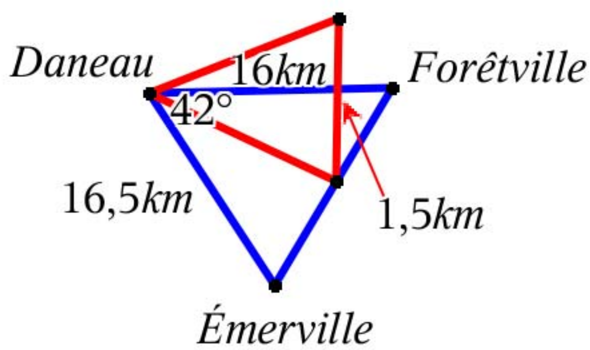
$$tan32=\frac{h}{143{,}88}$$

$$h=143{,}88tan32$$

$$h=89{,}9m$$

Exemple

De sa montgolfière, Justine signale qu'elle se trouve à une altitude de 1500m au−dessus d'un terrain de golf siuté à mi−chemin entre Émerville et Forêtville. Forêtville est à 16,0km à l'est de Daneau, et Émerville est à 16,5km de Daneau, à 42° au sud de l'est. Au degré près, quel est l'angle d'élévation de la montgolfière vue de Daneau?



Soit EF, la distance entre Émerville et Forêtville.

$$EF^2=16,5^2+16^2-2(16,5)(16)cos42$$

$$EF=11,65km$$

Soit M, le point milieu entre Émerville et Forêtville.

Donc, EM = 5,82km

Soit DM, la distance entre Daneau et le point milieu d'Émerville et Forêtville.

$$DM^2+(5,82)^2=(16,5)^2$$

$$DM^2=238,378$$

$$DM=15,4km$$

Soit x, l'angle d'élévation de la montgolfière vue de Daneau.

$$tanx=\frac{1,5}{15,4}$$

$$x=5,56°$$

L'angle d'élévation de la montgolfière vue de Daneau est donc de 6°.