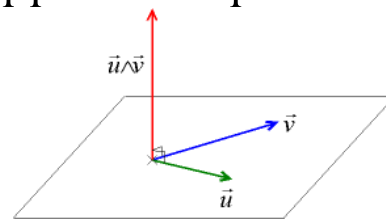


Le produit vectoriel et ses propriétés

Mise en situation

Les géologues se servent du produit vectoriel pour analyser et prédire l'activité sismique. De même, en infographie et en animation par ordinateur, on utilise le produit vectoriel pour représenter la lumière par rapport à un plan donné.



Feb 15-7:40 PM

Exploration - Mécanique

Mise en situation

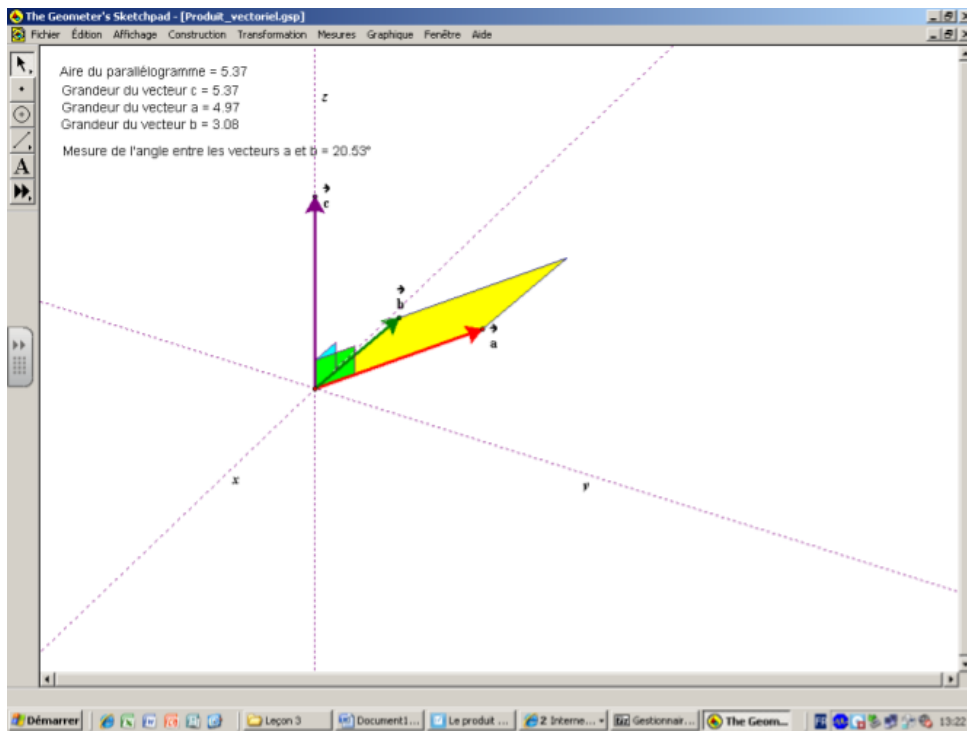
Imagine qu'on utilise une clé pour serrer un boulon qui retient deux pièces de bois ensemble. (voir p. 403)

La force exercée sur la clé la fait tourner dans le sens des aiguilles d'un montre, comme l'indique la figure. Le vecteur r représente la longueur de la poignée de la clé. L'effet de la rotation de la clé résulte du moment de force M , qui s'exerce au centre du boulon. Le moment de force s'appelle également le couple ou le moment de torsion.

La grandeur de ce moment de force dépend de la distance entre le centre du boulon et le point où on applique la force, ainsi que de la grandeur de la force perpendiculaire à la clé. La grandeur de cette force est calculer avec le produit vectoriel.

Feb 15-7:40 PM

Exploration



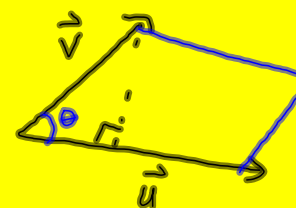
Feb 15-7:40 PM

Le produit vectoriel

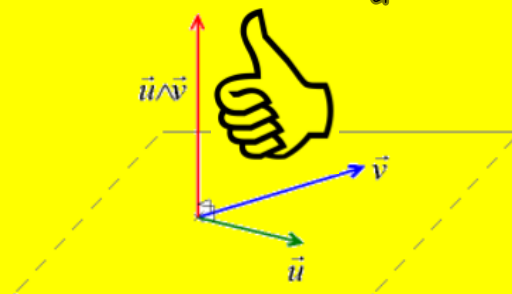
Le produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} est défini comme

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$$

$b \times h$



La direction du vecteur résultant du produit vectoriel obéit la règle de la main droite, comme le montre la figure à droite.



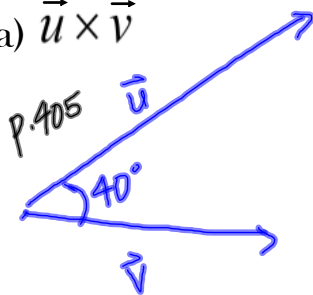
Cela signifie que l'ordre des vecteurs est important pour déterminer le sens de leur produit vectoriel.

Feb 15-7:40 PM

Exemple

Détermine chaque produit si $|\vec{u}|=30$ et $|\vec{v}|=20$, si l'angle formé par \vec{u} et \vec{v} est de 40° et si \vec{u} et \vec{v} sont dans le plan de la page.

a) $\vec{u} \times \vec{v}$



$$\vec{u} \times \vec{v} = |30||20|\sin 40$$

$$= 38,6 \hat{n}$$

$$= 38,6$$

Sort de la page

b) $\vec{v} \times \vec{u}$

$$= -38,6$$

dessous la page

Feb 15-7:40 PM

L'anticommutativité

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

http://videlectures.net/mit801f99_lewin_lec03/

Feb 15-7:40 PM

Le produit vectoriel sous forme cartésienne

Soit $a = [a_1, a_2, a_3]$ et $b = [b_1, b_2, b_3]$

Ainsi,

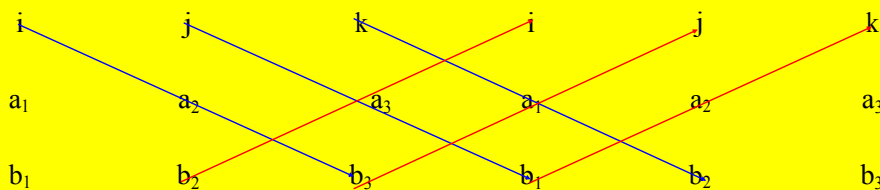
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \left| [a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1] \right|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

Preuve : p. 406

Feb 15-7:40 PM

Le produit vectoriel sous forme cartésienne (truc de calculs)



$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

Feb 15-7:40 PM

Exemple

Soit les vecteurs $\vec{a} = [7, 1, -2]$ et $\vec{b} = [4, 3, 6]$.

a) Détermine $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\begin{array}{cccc}
 7 & 1 & -2 & -2 \\
 4 & 3 & 6 & 6
 \end{array}$$

$6 - (-6) = 12$ (green arrow from 6 to -2)
 $-8 - 42 = -50$ (red arrow from 1 to 6)
 $14 - 12 = 2$ (green arrow from 7 to 6)

$$\vec{a} \times \vec{b} = [12, -50, 2]$$

Feb 15-7:40 PM

Les propriétés du produit vectoriel

Pour n'importe quels vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} et tout scalaire k dans l'ensemble des nombres réels :

- **Anticommutativité**

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

- **Distributivité**

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

- **Associativité**

$$k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$$

Feb 15-7:40 PM

Exemple

Détermine l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs $\vec{u} = [4, 5, 2]$ et $\vec{v} = [3, 2, 7]$ et détermine l'angle formé par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 7 & 3 & 2 & 7 \end{array}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = [31, -22, -7]$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{31^2 + 22^2 + 7^2} = 38,7$$

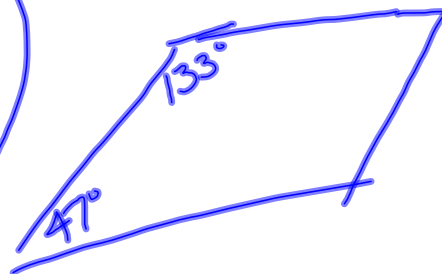
Feb 15-7:40 PM

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$$

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \right)$$

$$= \sin^{-1} \left(\frac{38,7}{\sqrt{45} \sqrt{62}} \right)$$

$$= 47^\circ$$



juin 2-10:31

Devoirs

p. 410 #1, 2, 4, 7, 8, 10, 13

Défis

p. 412 #18, 21, 23

Jan 31-6:35 PM

Produit_vectoriel.gsp