Les applications du produit scalaire

Mise en situation

Le produit scalaire a de nombreuses applications en mathématiques et en sciences. Il sert, entre autres, à déterminer le travail effectué, l'angle formé par deux vecteurs et la projection d'un vecteur sur un autre.

Feb 15-7:40 PM

Exemple

Détermine l'angle formé par les vecteurs de chaque paire.

a) $\vec{g} = [5,1]$ et $\vec{h} = [-3,8]$

$|\vec{g}| = \sqrt{5^2+1^2}$

$|\vec{h}| = \sqrt{3^2+8^2}$

$\vec{g} \cdot \vec{h} = |\vec{g}||\vec{h}| \cos\theta$

$(5)(-3)+(1)(8) = (\sqrt{26})(\sqrt{73})\cos\theta$

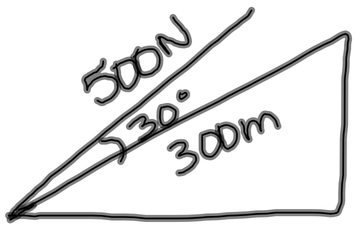
$\cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{26}\sqrt{73}}\right) = \theta$

$99,2° = \theta$

Feb 15-7:40 PM

Exemple

Angela va participer à un marathon dans la catégorie des athlètes en fauteuil roulant. À l'entraînement, elle grimpe une colline de 300m avec une force constante de 500N à un angle de 30° par rapport à la surface de la colline. Détermine le travail effectué par Angela, aux 100J près.



$$W = Fd$$
$$= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$= (300)(500)\cos 30$$
$$= 129\,900 \text{ J}$$

Feb 15-7:40 PM

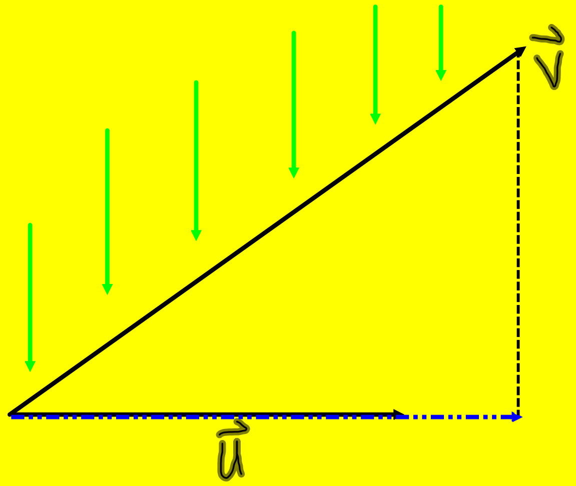
Manipuler le produit scalaire pour calculer l'angle entre deux vecteurs

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

juin 1-10:21

La projection d'un vecteur

On peut comparer la projection d'un vecteur à un ombre.



k

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}$$

Les flèches verticales dans le diagramme représentent la lumière provenant d'en haut.

juin 1-10:21

La projection d'un vecteur

La projection d'un vecteur $\vec{v}$ sur un vecteur $\vec{u}$ est l'ombre que $\vec{v}$ projette sur $\vec{u}$, en formant un triangle rectangle.

Si $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont perpendiculaires, il ne projette pas d'ombre et donc, la projection est $\vec{0}$.

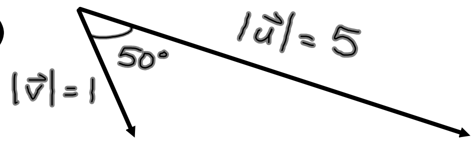
On utilise la projection de vecteurs dans les domaines de la cinématique, le génie, la conception de jeux vidéo et la navigation aérienne.

juin 1-10:21

Exemple

Détermine la projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.

a)



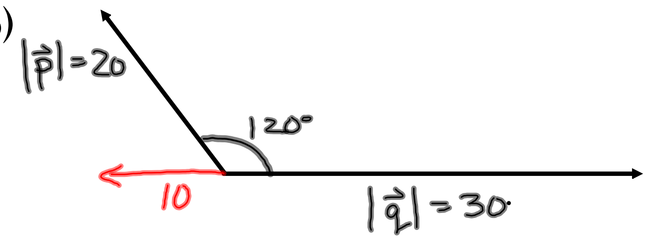
$$\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)$$

$$= \left(\frac{(5)(1)\cos 50}{1^2}\right)\vec{v}$$

$$= 3{,}21\,\vec{v}$$

Feb 15-7:40 PM

b)



$$\text{proj}_{\vec{q}}\,\vec{p} = \left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{\vec{q}\cdot\vec{q}}\right)\vec{q}$$

$$= \left(\frac{(20)(30)\cos 120}{30^2}\right)\vec{q}$$

$$= -\tfrac{1}{3}\,\vec{q}$$

Feb 15-7:40 PM

c) Détermine la projection de $\vec{d}$ = [2,-3] et $\vec{c}$ = [1,4].

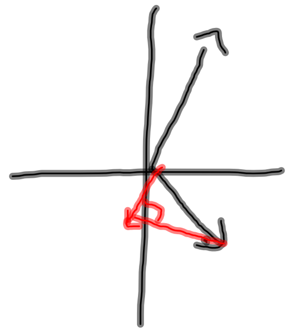
$$\text{proj}_{\vec{c}}\vec{d} = \left(\frac{\vec{d}\cdot\vec{c}}{\vec{c}\cdot\vec{c}}\right)\vec{c}$$

$$= \left(\frac{(2)(1)+(-3)(4)}{(1)(1)+(4)(4)}\right)\vec{c}$$

$$= \frac{-10}{17}\vec{c}$$

$$= \frac{-10}{17}[1,4]$$

$$= \left[\frac{-10}{17}, \frac{40}{17}\right]$$



Feb 15-7:40 PM

Exemple

Un magasin vend 350 paires de chaussures Excalibur et 275 paires de chaussures Camelot en un an. Une paire de chaussures Excalibur se vend 175$ et une paire de chaussures Camelot se vend 250$.

a) Définis un vecteur algébrique, $\vec{v}$, qui représente le nombre de paires de chaussures vendues.

$$\vec{v} = [350, 275]$$

b) Définis un vecteur algébrique, $\vec{p}$, qui représente le prix des chaussures.

$$\vec{p} = [175, 250]$$

Feb 15-7:40 PM

c) Détermine le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{p}$. Que représente-t-il?

$$\vec{v} \cdot \vec{p} = (350)(175) + (275)(250)$$

$$= 130\,000 \quad \text{Revenus}$$

Le produit scalaire représente les recettes (revenus) de la vente de chaussures, c'est-à-dire 130 000$.

mai 28-10:15

Devoirs

p. 384 #2a, 3a, 4a, 5a, 6-12, 15-17

Défis

p. 386 #19, 20

Jan 31-6:35 PM