Les applications du produit scalaire et du produit vectoriel

Mise en situation

On obtient le même effort de rotation en appliquant une force de 6N à 0,1m d'un axe qu'en appliquant une force de 0,1N à 6m du même axe. Ce concept est à concevoir des moteurs d'automobiles et de locomotives.

Feb 15-7:40 PM

Le moment de force

- Le moment de force est représenté par la lettre grecque tau
- Il mesure l'efficacité d'une force qui fait tourner un objet autour d'un axe.
- Il correspond au produit vectoriel de la force et du bras de levier (où le bras de levier est le vecteur qui relie l'axe de rotation au point où la force est appliquée)
- L'unité de mesure du moment est le newton-mètre (N· m)

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F}$$

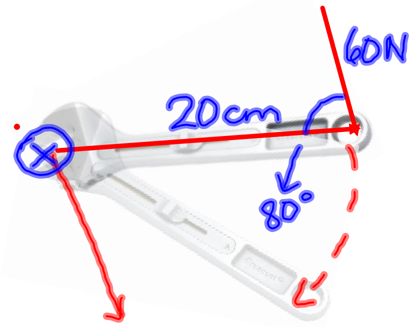
$$\tau = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right| sin\theta$$

Feb 15-7:40 PM

Exemple

On utilise une clé pour serrer un boulon. On applique une force de 60N dans le sens des aiguilles d'une montre, à 80° par rapport à la poignée et à 20cm du centre du boulon.

a) Calcule la grandeur du moment de force.



$$\tau = |\vec r|\,|\vec F| \sin\theta$$
$$= (0{,}2)(60)\sin 80$$
$$= 11{,}8\ N\cdot m$$

b) Dans quel sens le vecteur moment de force pointe-t-il?

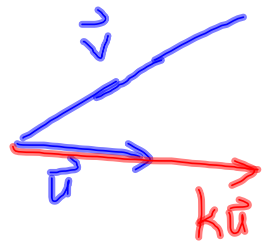
On serre le boulon.

Feb 15-7:40 PM

Exemple

Détermine la projection de $\vec v = [4, 2, 7]$ sur $\vec u = [6, 3, 8]$ et sa grandeur.

$$proj_{\vec v}\,\vec u = \left(\frac{\vec u \cdot \vec v}{\vec u \cdot \vec u}\right)\vec u$$



$$= \left(\frac{4\cdot 6 + 2\cdot 3 + 7\cdot 8}{6\cdot 6 + 3\cdot 3 + 8\cdot 8}\right)\vec u$$

$$= \left(\frac{86}{109}\right)\vec u = \left[\frac{86}{109}\cdot 6, \frac{86}{109}\cdot 3, \frac{86}{109}\cdot 8\right]$$

$$|proj_{\vec v}\,\vec u| = \frac{86}{109}\sqrt{6^2+3^2+8^2}$$
$$\doteq 8{,}2$$

Feb 15-7:40 PM

Exemple

Une force exprimée en newtons et définie par $\vec{F} = [300, 700, 500]$ agit sur un objet. Le déplacement de l'objet, en mètres, est défini par $\vec{d} = [3, 1, 12]$.

a) Détermine le travail effectué dans le sens du déplacement.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$
$$= [300, 700, 500] \cdot [3, 1, 12]$$
$$= 300 \cdot 3 + 700 \cdot 1 + 500 \cdot 12$$
$$= 7600\ J$$

Feb 15-7:40 PM

b) Détermine le travail contraire à la force gravitationnelle, qui s'exerce dans le sens de la partie négative de l'axe des z.

$$\vec{F} = [0, 0, 500]$$
$$\vec{d} = [0, 0, 12]$$

$$W = 500 \cdot 12$$
$$= 6000\ J$$

Feb 15-7:40 PM

Le produit mixte

Certaines situations requièrent une combinaison du produit scalaire et du produit vectoriel.

Le produit mixte est l'une de ces combinaisons.

$$\vec{a} \bullet \vec{b} \times \vec{c}$$

Étant donné la nature du produit scalaire, il faut déterminer le produit vectoriel en premier pour que cette combinaison soit valable.

Feb 15-7:40 PM

Exemple

Soit les vecteurs $\vec{u} = [4, 3, 1]$, $\vec{v} = [2, 5, 6]$ et $\vec{w} = [10, -3, -14]$.

a) Évalue l'expression $\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}$.

$$\begin{matrix} 4 & 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 2 & 5 & 6 \end{matrix}$$

$\vec{u} \times \vec{v} = [13, -22, 14]$

$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = [13, -22, 14] \cdot [10, -3, -14]$

$= 130 + 66 - 196$

$= 0$

Feb 15-7:40 PM

b) Évalue $\vec{w} \bullet \vec{u} \times \vec{v}$. Comment la réponse se compare-t-elle à celle que tu as obtenue en a)? Pourquoi?

$$\vec{w} \cdot \vec{u} \times \vec{v} = 0$$

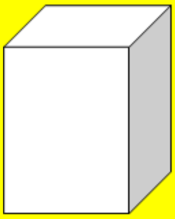
c) Explique la signification géométrique de ce résultat.

Les vecteurs sont coplanaires.

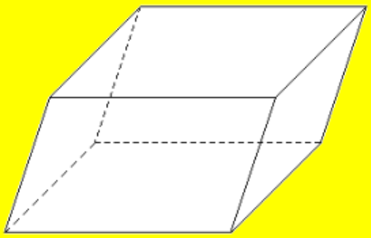
juin 2-14:04

Le parallélépipède

Un prisme rectangulaire a six faces orthogonales (perpendiculaires). Chacune de ses faces est un rectangle.



Un parallélépipède est un autre solide à six faces. Chacune de ses faces est un parallélogramme.

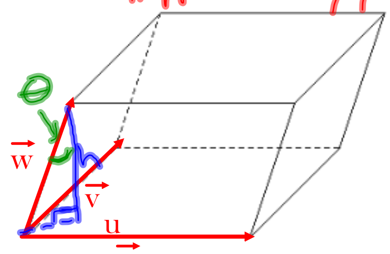


Feb 15-7:40 PM

Exemple

On peut démontrer que le volume, V, d'un parallélépipède est donné par la formule V = Ah, où A représente l'aire de la base du solide et h, sa hauteur. Vérifie qu'il est possible de déterminer le volume du parallélépipède ci-contre à l'aide du produit mixte $\vec{w}\bullet\vec{u}\times\vec{v}$. p.416

Rappel $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$



$$\cos\theta = \frac{h}{|\vec{w}|}$$

$$|\vec{w}| = \frac{h}{\cos\theta} \quad \therefore h = |\vec{w}|\cos\theta$$

$$A = |\vec{u}\times\vec{v}|$$

$$V = Ah$$

$$= \underbrace{|\vec{u}\times\vec{v}|}_{|\vec{a}|}\ \underbrace{|\vec{w}|}_{|\vec{b}|}\cos\theta \quad = \underbrace{\vec{u}\times\vec{v}}_{\vec{a}}\cdot\underbrace{\vec{w}}_{\vec{b}}$$

Feb 15-7:40 PM

Devoirs

p. 418 #1, 2a, 3c, 4ab, 5a, 6 - 8, 11

Défis

p. 418 #13, 15, 16

Jan 31-6:35 PM

Pièces jointes

Produit_vectoriel.gsp