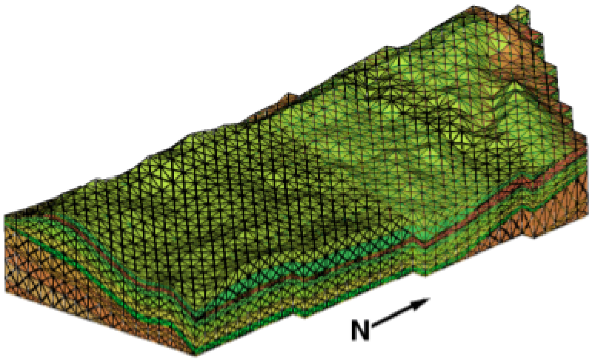
L'algèbre des vecteurs

Mise en situation

On peut représenter de simples quantités vectorielles géométriquement. Toutefois, certaines applications sont plus complexes ou font intervenir une troisième dimension. Dans un tel cas, il faut savoir représenter un vecteur algébriquement, c'est-à-dire à l'aide des coordonnées cartésiennes x, y et z.



Dans ce chapitre, tu exploreras la représentation algébrique de vecteurs et tu étudieras un système de coordonnées dans l'espace tridimensionnel.

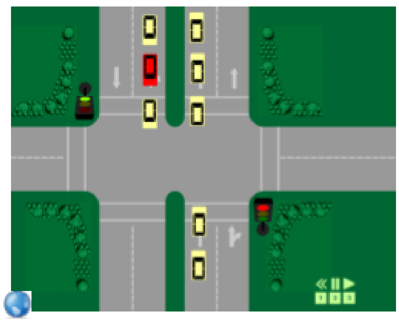
Tu calculeras aussi deux types de produits de vecteurs et tu exploreras leurs applications.

Feb 15-7:40 PM

L'algèbre des vecteurs

Problème du chapitre

Les automobiles comprennent de nombreuses pièces mobiles tout en étant elles-mêmes des objets mobiles.
On peut utiliser des vecteurs pour analyser leur conception et leur mouvement.



Comment les vecteurs peuvent-ils aider à comprendre ce qui arrive à la quantité de mouvement lors d'un accident de la route?

Quel travail une dépanneuse effectue-t-elle quand elle remorque une voiture en panne?

Questions
p. 369 #19, p. 385 #17, p. 419 #13
Conclusion p. 421

Feb 15-7:40 PM

Les vecteurs algébriques

Mise en situation

Les mathématiciens René Descartes et Pierre de Fermat ont établi un lien entre l'algèbre et la géométrie au début du XVIIe siècle.

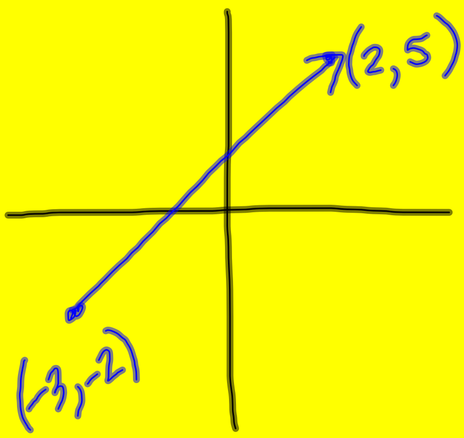
Ils ont ainsi créé un nouveau domaine mathématique, à savoir la géométrie analytique. Celle-ci permet de représenter algébriquement des concepts géométriques comme les vecteurs, ce qui facilite entre autres les opérations sur les vecteurs. Sans cette nouvelle géométrie, Newton et Leibniz auraient été incapables de jeter aussi rapidement les bases du calcul différentiel.

Feb 15-7:40 PM

Définitions

Soit $\vec{u}$, un vecteur quelconque dans le plan limité par les points Q et R.

Un vecteur algébrique (ou vecteur cartésien)
$\overrightarrow{QR}$ est un vecteur algébrique car on peut définir son origine et son extrémité à l'aide de coordonnées cartésiennes.

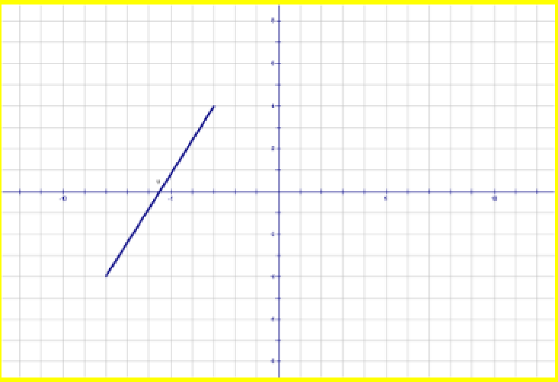


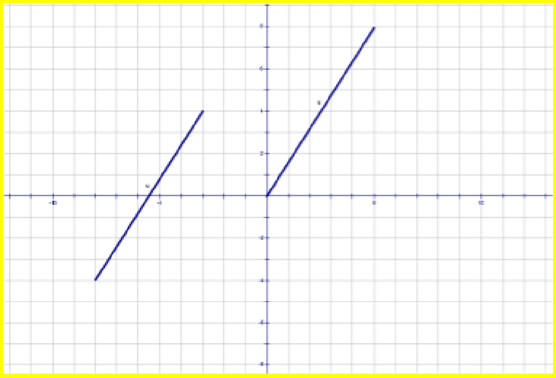
mai 11-10:38

Définitions

Un vecteur position

Si on fait subir une translation à u afin que son origine coïncide avec l'origine O du plan, son extrémité sera en un point P(a,b).
Ceci est le vecteur position [a, b].
(crochets indiquent vecteur au lieu de coordonnées (a,b))





mai 11-10:38

Définitions

Un vecteur unitaire

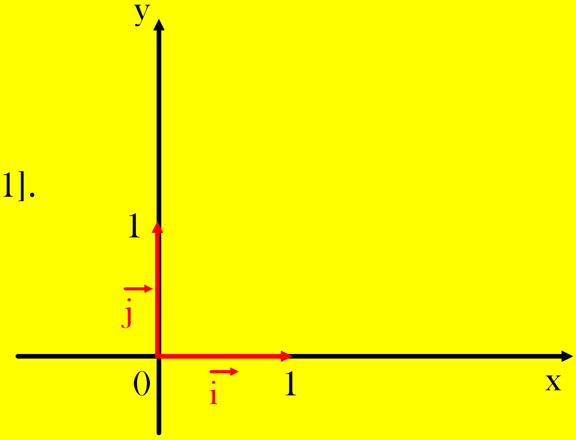
La base des vecteurs algébriques.

Un vecteur unitaire a une grandeur de 1 unité. $|\vec{v}| = 1$

i et j sont des vecteurs unitaires particuliers, car leur origine coïncide avec l'origine du plan.

L'extrémité de i est au point (1,0).
L'extrémité de j est au point (0,1).

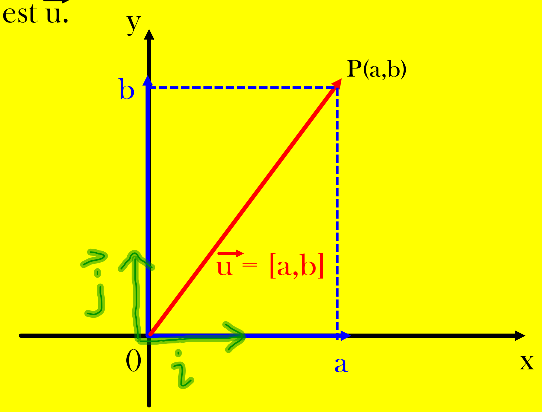
En notation cartésienne, i = [1,0] et j = [0, 1].



mai 11-10:38

Les composantes

Si on décompose $\vec{u}$ en ses composantes horizontales et verticales, on obtient deux vecteurs dont la somme est $\vec{u}$.



Ainsi, $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ combinaison linéaire

De plus, $a\vec{i} = [a,0]$ et $b\vec{j} = [0,b]$

Ainsi, $\vec{u} = [a,0] + [0,b]$

mai 11-10:38

La grandeur d'un vecteur algébrique

Puisque l'origine du vecteur est à (0,0) et son extrémité est à (a,b), pour déterminer la grandeur d'un vecteur, on utilise la formule de la distance entre deux points.

$$d = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2}$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2}$$

mai 11-10:38

L'addition de vecteurs algébriques

Pour additionner deux vecteurs algébriques $\vec{u}$ = [u1, u2] et $\vec{v}$ = [v1, v2], utilise les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Preuve p. 361

Donc, la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2]$$

mai 11-10:38

La multiplication de vecteurs algébriques

Soit $\vec{u}$ = [u1, u2] et k est dans l'ensemble des nombres réels.

Preuve p. 362

Donc, le produit d'un vecteur $\vec{u}$ et d'un scalaire k est

$$k\vec{u} = [ku1, \ ku2]$$

mai 11-10:38

La soustraction de vecteurs algébriques

Pour soustraire deux vecteurs algébriques $\vec{u}$ = [u1, u2] et $\vec{v}$ = [v1, v2], utilise les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Preuve p. 362

Donc, la différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est

$$\vec{u} - \vec{v} = [u1 - v1, u2 - v2]$$

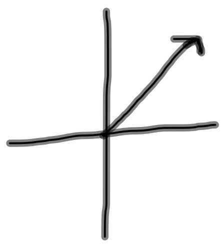
mai 11-10:38

Exemple

Soit les vecteurs $\vec{a}$ = [5,-7] et $\vec{b}$ = [2,3]. Détermine :

a) une expression qui représente $\vec{a}$ comme la somme de ses composantes horizontale et verticale

$$\vec{a} = [5,0] + [0,-7]$$



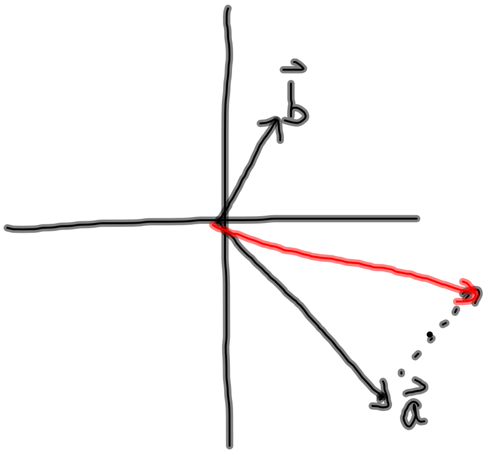
b) une expression qui représente b en fonction de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$.

$$\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

Feb 15-7:40 PM

c) $3\vec{a}$ $= 3[5,-7]$

$= [15,-21]$



d) $\vec{a} + \vec{b}$ $= [5,-7] + [2,3]$

$= [7,-4]$

e) $2\vec{a} - 4\vec{b}$ $= 2[5,-7] - 4[2,3]$

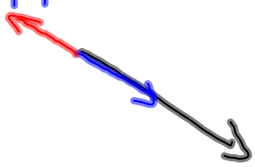
$= [10,-14] + [-8,-12]$

$= [2,-26]$

f) deux vecteur unitaires colinéaires à $\vec{a}$

$\vec{a} = [5,-7]$ $|\vec{a}| = \sqrt{25+49}$

$= \sqrt{74}$



Soit $\vec{b}$ et $\vec{c}$ les vecteurs unitaires à $\vec{a}$

$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{74}}[5,-7]$ $\vec{c} = \left[\frac{-5}{\sqrt{74}}, \frac{7}{\sqrt{74}}\right]$

$= \left[\frac{5}{\sqrt{74}}, \frac{-7}{\sqrt{74}}\right]$

g) la grandeur de $\vec{a} - \vec{b}$

$\vec{a} = [5, -7]$

$\vec{b} = [2, 3]$

$\vec{a} - \vec{b} = [3, -10]$

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{9 + 100}$

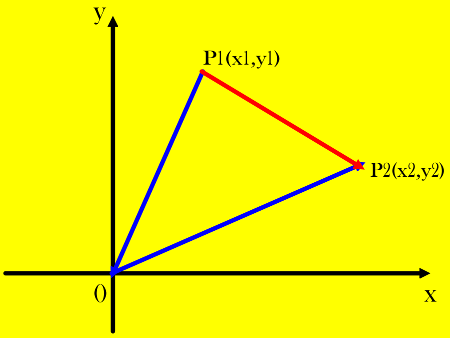
$= \sqrt{109}$ unités

mai 11-10:46

Le vecteur algébrique compris entre deux points

Soit P1(x1,y1) et P2(x2,y2), deux points dans le plan cartésien. Alors,

$\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$



Pour déterminer la grandeur de $\overline{P1P2}$, on utilise la formule de la distance entre deux points.

$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

mai 11-10:38

Exemple

Détermine les composantes et la grandeur de chaque vecteur.

a) $\overrightarrow{AB}$, compris entre A(1,3) et B(7,2)

$\overrightarrow{AB} = [7-1, 2-3]$
$= [6, -1]$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36+1}$
$= \sqrt{37}$ unités

b) $\overrightarrow{CD}$, compris entre C(-10,0) et D(0,10)

$\overrightarrow{CD} = [10, 10]$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{100+100}$
$= \sqrt{200}$ unités

c) $\overrightarrow{EF}$, compris entre E(4,-3) et F(1,-7)

$$\overrightarrow{EF} = [-3,-4]$$

$$|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$= 5 \text{ unités}$$

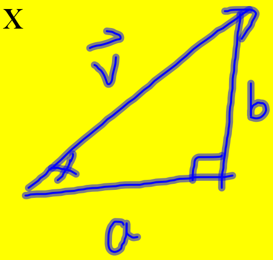
Feb 15-7:40 PM

Représenter algébriquement des vecteurs géométriques

Rappel : Les composantes horizontales et verticales

Soit le vecteur $\vec{v}$ et un angle x formé par $\vec{v}$ et l'horizontale
Sa composante horizontale $= |\vec{v}| \cos x$
Sa composante verticale $= |\vec{v}| \sin x$

Alors, $\vec{v} = [|\vec{v}|\cos x, |\vec{v}|\sin x]$



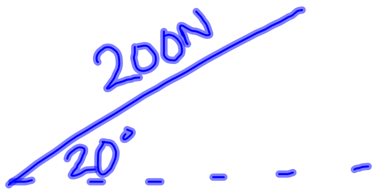
$$\cos x = \frac{a}{|\vec{v}|}$$

$$|\vec{v}|\cos x = a$$

mai 11-10:38

Exemple

Représente algébriquement une force de 200N à 20° par rapport à l'horizontale.

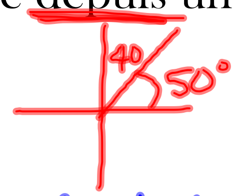


Soit $\vec{u}$, le vecteur algébrique.

$\vec{u} = [200\cos 20, 200\sin 20]$
$= [187{,}9 ; 68{,}4]$

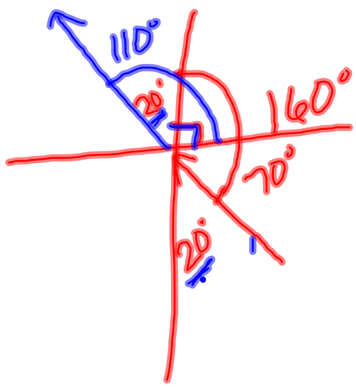
Exemple

Un bateau se déplace à 23km/h par rapport à l'eau, selon un cap de 040°. Un courant de 8km/h se déplace depuis un azimut de 160°.



a) Représente chaque vecteur algébriquement.

Soit $\vec{b}$, le vecteur représentant le bateau et $\vec{c}$, le vecteur-courant.



$\vec{b} = [23\cos 50, 23\sin 50]$

$\vec{c} = [8\cos 110, 8\sin 110]$

b) Détermine la vitesse vectorielle résultante du bateau.

Soit $\vec{v}$, le vecteur résultant

$$\vec{v} = [23\cos 50 + 8\cos 110,\ 23\sin 50 + 8\sin 110]$$

$$= [12{,}048 ; 25{,}137]$$

Feb 15-7:40 PM

Devoirs

p. 367 #3, 5, 6, 8, 9 - 12, 14, 15, 19

Défis

p. 369 #21, 23

Jan 31-6:35 PM

Pièces jointes

Vecteur algébrique.gsp