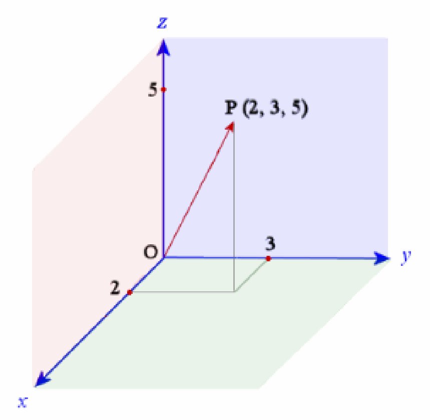
Les vecteurs dans l'espace tridimensionnel

Mise en situation

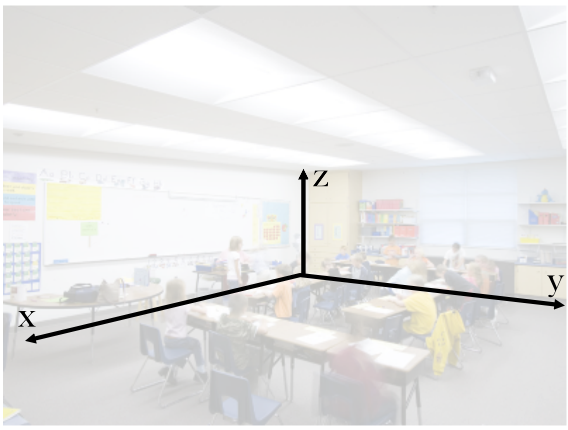
La force, la vitesse vectorielle, et d'autres quantités vectorielles comportent souvent une troisième dimension. Comment peut-on représenter en deux dimensions des points et des vecteurs à trois dimensions? Dans cette section, tu étudieras et utiliseras un système de coordonnées cartésiennes pour représenter des points et des vecteurs à trois dimensions. Tu appliqueras aussi les opérations effectués sur des vecteurs dans le plan aux vecteurs dans l'espace tridimensionnel.

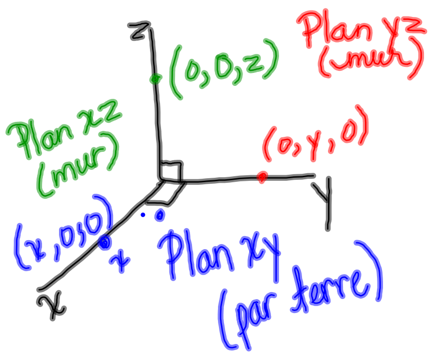


Feb 15-7:40 PM

Exploration

p. 387
Tu peux imaginer une pièce rectangulaire comme un espace tridimensionnel où un système de coordonnées cartésiennes permet de situer tout point à l'aide d'un triplet (x, y, z).

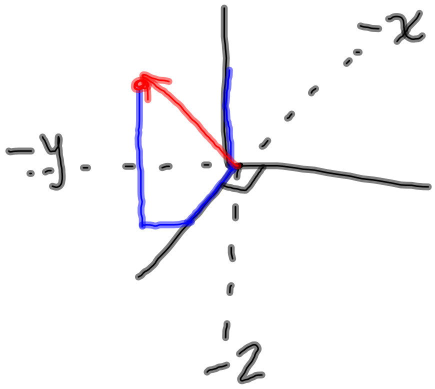


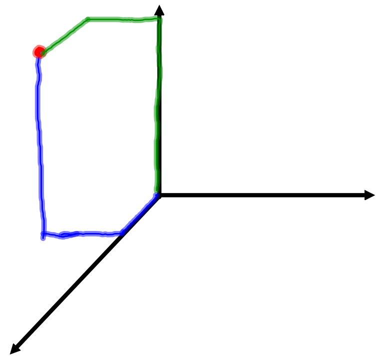


Feb 15-7:40 PM

Exploration

Pour situer un point, il faut partir de l'origine. Déplace-toi le long de l'axe des x, ensuite y et enfin, z.





$(2, -1, 4)$ $(2, -3, 7)$

Feb 15-7:40 PM

Les octants

Un plan cartésien est divisé en quatre quadrants.

Un repère cartésien tridimensionnel est divisé en huit octants. Les points du premier octant ont trois coordonnées positives. On ne s'entend pas sur le nom à donner aux sept autres octants.

1er octant (x, y, z)

$(-x, y, z)$ $(x, -y, -z)$
$(x, -y, z)$ $(-x, -y, -z)$
$(x, y, -z)$ $(-x, y, -z)$
$(-x, -y, z)$

Feb 15-7:40 PM

Exemple

Décris l'octant dans lequel chaque point se situe.

a) A(1, 2, 3)

1er octant

b) B(-3, 2, 1)

L'octant à l'arrière dans la partie supérieure droite du repère tridimensionnel.

c) C(-3, -2, -1)

L'octant à l'arrière dans la partie inférieure gauche du repère tridimensionnel.

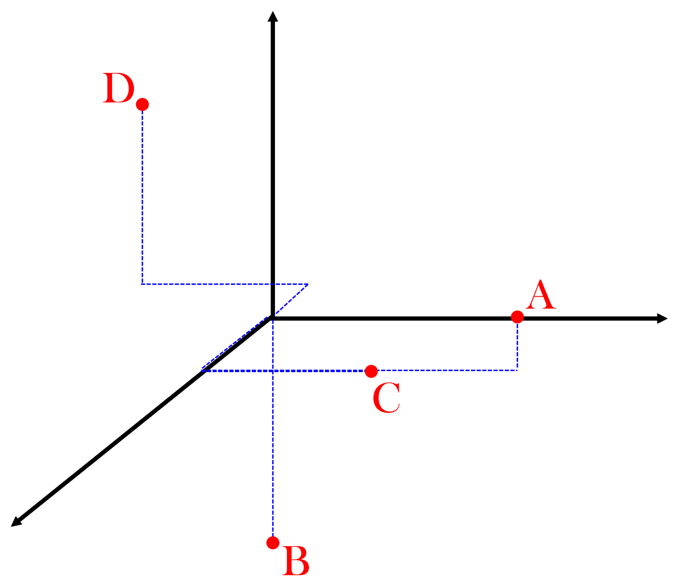
d) D(1, 2, -3)

L'octant à l'avant dans la partie inférieure droite du repère tridimensionnel.

Feb 15-7:40 PM

Exemple

Situe les points A(2,6,1), B(0,0,-6), C(2,3,0) et D(-1,-3,4).



Feb 15-7:40 PM

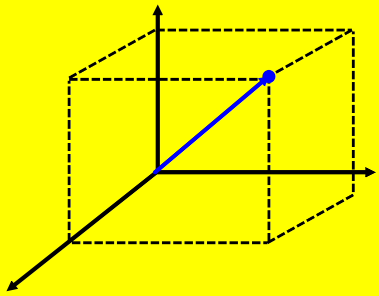
Les vecteurs algébriques

Soit un vecteur $\vec{v}$ dans l'espace.

Si son origine coïncide avec l'origine O, son extrémité sera en un point $P(x_1, y_1, z_1)$.

Alors, v sera le vecteur position du point P et

$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = [x_1, y_1, z_1]$



Feb 15-7:40 PM

Les vecteurs unitaires

Tout comme dans le plan, on définit les vecteurs unitaires le long des axes.

$$\vec{i} = [1, 0, 0]$$

$$\vec{j} = [0, 1, 0]$$

$$\vec{k} = [0, 0, 1]$$

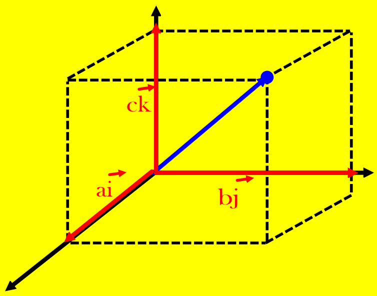
Feb 15-7:40 PM

Les caractéristiques d'un vecteur dans l'espace

Soit un vecteur $\vec{u} = [a, b, c]$.

Donc, $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

Ou, $\vec{u} = [a,0,0]+[0,b,0]+[0,0,c]$



La grandeur de $\vec{u}$ est $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
(preuve p. 391)

Feb 15-7:40 PM

Exemple

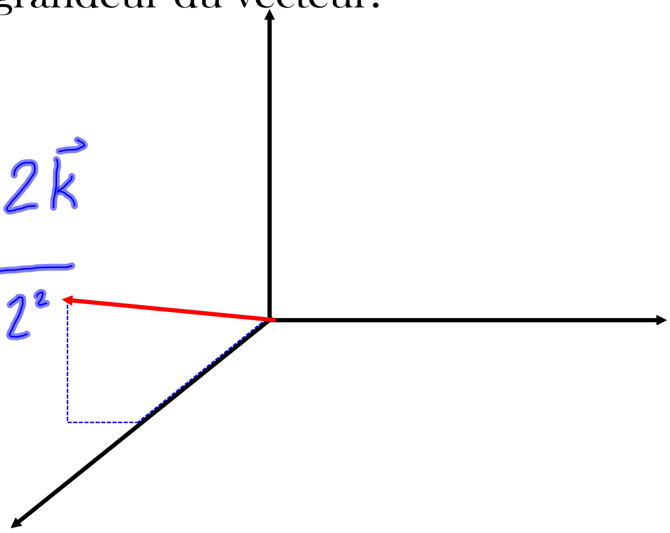
Pour chaque cas :
i) esquisse le vecteur position;
ii) exprime le vecteur sous la forme $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$;
iii) détermine la grandeur du vecteur.

a) $\vec{u} = [3, -1, 2]$

$\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

$|\vec{u}| = \sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}$

$= \sqrt{14}$



Feb 15-7:40 PM

La multiplication de vecteur par un scalaire dans l'espace

Soit un vecteur $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ et tout scalaire $k \in R$,

Donc, $k\vec{u} = [ku_1, ku_2, ku_3]$

Tout comme dans le plan, $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Feb 15-7:40 PM

Exemple

Détermine la valeur de a telle que [1, 2, 3] et [2, a, 6] sont colinéaires.

[1, 2, 3]
[2, a, 6]

$\boxed{k=2}$

$a=4$

Détermine la valeur de b et la valeur de c telles que [-2, b, 7] et [c, 6, 21] sont colinéaires.

[-2, b, 7]
[c, 6, 21]

$\boxed{k=3}$

$b=2$
$c=-6$

Feb 15-7:40 PM

Les opérations des vecteurs dans l'espace et autres

Soit deux vecteurs algébriques $\vec{u} = [u1, u2, u3]$ et $\vec{v} = [v1, v2, v3]$.

L'addition des vecteurs
$\vec{u} + \vec{v} = [u1 + v1, u2 + v2, u3 + v3]$

La soustraction des vecteurs
$\vec{u} - \vec{v} = [u1 - v1, u2 - v2, u3 - v3]$

Le produit scalaire
$\vec{u} \cdot \vec{v} = u1v1 + u2v2 + u3v3$

Le vecteur compris entres deux points
Le vecteur d'origine P1(x1, y1, z1) et d'extrémité P2(x2, y2, z2) est
$\overrightarrow{P1P2} = [x2 - x1, y2 - y1, z2 - z1]$

Feb 15-7:40 PM

Exemple

a) Soit les points A(3, 6, -1) et B(-1, 0, 5). Exprime $\overrightarrow{AB}$ sous forme d'un triplet. Puis, exprime $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

$\overrightarrow{AB} = [-4, -6, 6]$
$= -4\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k}$

b) Détermine la grandeur de $\overrightarrow{AB}$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{88}$

c) Détermine un vecteur unitaire de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AB}$.

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{88}}[-4, -6, 6] = \left[\frac{-4}{\sqrt{88}}, \frac{-6}{\sqrt{88}}, \frac{6}{\sqrt{88}}\right] = \left[\frac{-2}{\sqrt{22}}, \frac{-3}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}\right]$

Feb 15-7:40 PM

Exemple

Soit les vecteurs $\vec{u} = [2, 3, -5]$, $\vec{v} = [8, -4, 3]$ et $\vec{w} = [-6, -2, 0]$.
Simplifie chaque expression.

a) $-3\vec{v} = [-24, 12, -9]$

b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = [4, -3, -2]$

c) $|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{6^2 + 1^2 + 8^2} = \sqrt{149}$

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 16 - 12 - 15$
$= -11$

Feb 15-7:40 PM

Exemple

Déterminе si les vecteurs $\vec{a} = [6, 2, 4]$ et $\vec{b} = [9, 3, 6]$ sont colinéaires.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$= \dfrac{54 + 6 + 24}{\sqrt{56}\sqrt{126}}$

$= \dfrac{84}{84}$

$= 1$

$\therefore \theta = 0°$ et $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.

Feb 15-7:40 PM

Exemple

Détermine un vecteur orthogonal à [3, 4, 5].

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (\cos 90° = 0)$

Soit $\vec{a} = [3, 4, 5]$ et $\vec{b} = [x, y, z]$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$
$$3x + 4y + 5z = 0$$

Posons $x = 2$, $y = 4$

$\therefore 3(2) + 4(4) + 5z = 0$
$$6 + 16 + 5z = 0$$
$$5z = -22$$
$$z = \frac{-22}{5}$$

$\therefore \vec{b} = \left[2, 4, \frac{-22}{5}\right]$

Feb 15-7:40 PM

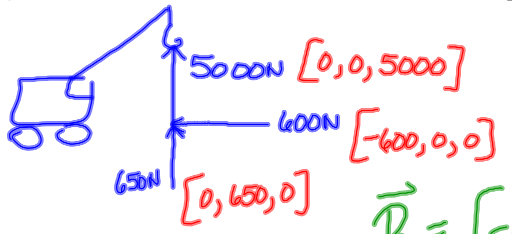
Les propriétés des opérations sur les vecteurs dans l'espace

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
$$k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$$
$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Feb 15-7:40 PM

Exemple

Une grue soulève une poutre d'acier avec une force de 5000N. Au même moment, deux travailleurs poussent la poutre, l'un avec une force de 600N vers l'ouest et l'autre avec une force de 650N vers le nord. Détermine la grandeur de la force résultante qui s'exerce sur la poutre.



$$\vec{R} = [-600, 650, 5000]$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{600^2+650^2+5000^2}$$

$$= 5078N$$

Feb 15-7:40 PM

Devoirs

p. 399 #1, 3, 5, 7 - 9, 12, 16, 17, 19, 23, 26, 35, 36, 39

Défis

p. 402 #42

Jan 31-6:35 PM

Pièces jointes

Produit_vectoriel.gsp